VITTORIO EM. III

NDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXV

Palchetto

Num.° d' ordine 23

28159

46-6-1

NAZIONALE
B. Prov.
I
1353
VITT. EM. III
NAPOLI

Digitized by Google

R. Prov.
I
1853

Digitized by Google

Digitized by Google

608050

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PIANA

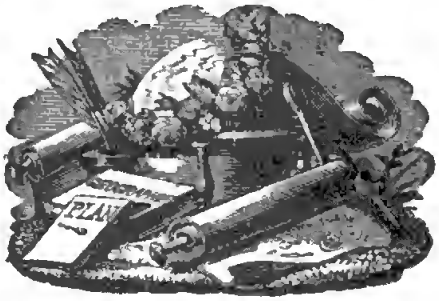
DI

ANNIBALE RIERA

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL REAL COLLEGIO MILITARE

OPERA COMPILATA, PER ORDINE SUPERIORE, AD USO DEL BATTAGLIONE DEGLI ALLIEVI MILITARI.

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

NAPOLI

Reale Tipografia Militare

1852.

Digitized by Google

AVVERTIMENTO

Per non interrompere la catena dei teoremi dimostrati in questi Elementi di Geometria Piana, abbiamo riuniti in fine dell' opera, tanto i problemi nei quali si mostra il modo di eseguire effettivamente le costruzioni che in taluni dei teoremi suddetti si sono supposte eseguite, perchè evidentemente possibili, quanto i problemi che si sono creduti più necessarî alla pratica.

Tenendo tale sistema abbiamo stimato superfluo aggiungere la dimostrazione della massima parte di detti problemi, per le due ragioni seguenti: 1.ª che sarà facilissimo, all' allievo che à ben percorso l' intero stadio delle verità dimostrate, supplire tale dimostrazione da se solo, o dopo averla intesa per una sola volta dal Professore che lo istruisce; 2.ª Per dare all' allievo medesimo una occasione di esercitarsi nelle cose già fatte, e per abituarlo inoltre a rinvenire le ragioni che servono a mettere in evidenza quanto si è proposto.

Facciamo avvertire finalmente che essendosi questi elementi divisi in tre parti principali cioè 1.° *Libro*, 2.° *Libro*, e *Problemi*, delle tre tavole che sono in fine, la prima contiene le sole figure relative al 1.° Libro; la seconda quelle relative al 2.° Libro; e la terza quelle relative ai Problemi.

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PIANA.

DEFINIZIONI E NOZIONI PRELIMINARI.

1. La Geometria è la scienza che tratta della misura dei *solidi*, delle *superficie* e delle *linee*.

2. *Solido* o *corpo* è tutto ciò che sotto forma propria occupa una parte dello spazio.

Ogni solido à tre dimensioni, che diconsi *lunghezza*, *larghezza*, e *profondità* o *altezza*.

3. L'esterno di ogni solido dicesi *superficie*.

Ogni superficie à due sole dimensioni che diconsi *lunghezza* e *larghezza*.

4. L'intersezione di due superficie dicesi *linea*. Il limite di una superficie dicesi pure *linea*.

Ogni linea à una sola dimensione, che dicesi *lunghezza*.

5. L'intersezione di due linee dicesi *punto*.

Gli estremi di una linea si dicono pure *punti*.

Il punto non à nessuna dimensione.

6. La linea più corta che può condursi da un punto ad un'altro dicesi *linea retta*.

7. Una linea che è composta di linee rette dicesi *spezzata*.

8. Una linea che non è retta, nè composta di linee rette dicesi *curva*.

9. La superficie sulla quale una retta posta in direzioni diverse, può adattarsi per tutta la sua lunghezza, dicesi *superficie piana* o semplicemente *piano*.

10. Una superficie che non è piana, nè composta di superficie piane, dicesi *curva*.

Digitized by Google

11. Per *angolo* s'intende la quantità più o meno grande per la quale due rette che s'incontrano s'allontanano fra loro, avendo riguardo alla posizione rispettiva delle medesime, e non già alla lunghezza.

Le due rette che s'incontrano si dicono *lati dell' angolo*, ed il punto dove s'incontrano *vertice dell' angolo*.

12. Due angoli *(fig. 1.)* ABC, ABD si dicono adiacenti, o consecutivi, quando avendo un lato AB comune, sono posti, rispetto al medesimo, l'uno da una parte, e l'altro dall'altra.

13. Quando una retta ne incontra un'altra si formano due angoli adiacenti, che possono essere o uguali, o disuguali. Sono uguali quando la retta AB *(fig. 2.)* non s'inclina più dalla parte BD che dall'altra BC; e sono disuguali quando la AB *(fig. 3.)* s'inclina più dalla parte BD che dall'altra BC; o viceversa.

Nel 1.° caso la AB si dice *perpendicolare* alla CD, e ciascuno degli angoli ABC, ABD dicesi *retto;* nel 2.° caso la AB si dice *obliqua* alla CD, e l'angolo ABC, maggiore del retto, si dice *ottuso*, e l'altro ABD, minore del retto, dicesi *acuto*.

14. Due angoli si dicono l'uno *complemento* dell'altro quando sommati formano un'angolo retto.

15. Due angoli si dicono l'uno *supplemento* dell'altro quando sommati formano due angoli retti.

16. Una superficie piana limitata per ogni dove da linee rette dicesi *figura rettilinea* o *poligona;* o solamente *poligono*.

17. Ciascuna delle rette che limitano un poligono si dice *lato*, e la somma dei lati dicesi *contorno* o *perimetro*.

18. Un poligono si dice *triangolo* o *trilatero*, *quadrilatero*, *pentagono*, *esagono*, *etc.* secondo che à tre, quattro, cinque, sei lati, etc.

Digitized by Google

SPIEGAZIONE DI ALCUNI VOCABOLI USATI IN GEOMETRIA

19. *Assioma* — è una verità evidente per se stessa.

20. *Teorema* — è una verità che diviene evidente dopo una dimostrazione.

21. *Problema* — è una quistione che à bisogno di soluzione.

22. *Lemma* — è una verità che serve a facilitare la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

I teoremi, i problemi, ed i lemmi, si dicono in generale *proposizioni*.

23. *Corollario* — è la conseguenza che deriva da una o più proposizioni.

24. *Scolio* — è l'osservazione che si fa dopo una o più proposizioni.

25. *Ipotesi* — è lo stesso che supposizione.

ASSIOMI

26. 1.° Il tutto è uguale alla somma delle sue parti, ed è maggiore di ciascuna di esse.

2.° Due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

3.° Se a quantità uguali si aggiungono, o tolgono, quantità uguali, si hanno quantità uguali.

4.° Se a quantità disuguali si aggiungono, o tolgono, quantità uguali, si hanno quantità disuguali.

5.° Se due quantità sono uguali, le loro metà, o i loro doppi sono pure uguali.

6.° Se una quantità è minore di un'altra, la metà, o il doppio della prima è minore della metà, o del doppio della seconda.

7.° Da un punto ad un'altro non si può condurre che una sola retta.

8.° Una retta può sempre prolungarsi oltre i suoi estremi, ed in un modo solo.

Digitized by Google

9.° Due rette possono sempre adattarsi l'una sull'altra in modo da confondersi, e formare una sola e medesima retta.

10.° Due angoli complementi o supplementi di un terzo sono uguali fra loro.

11.° Due linee, due angoli, due figure, che combaciano perfettamente sono uguali fra loro.

Digitized by Google

LIBRO I.

CAPITOLO I.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI, E DELLE OBLIQUE.

27. Teorema. *Da un punto B dato su di una retta CD non si può innalzare alla medesima che una sola perpendicolare BA* (fig. 2).

Poichè qualunque altra retta che passa pel punto B, ed è diversa da BA, dovendo inclinarsi più da una parte BC che dall'altra BD, o viceversa, non sarà perpendicolare a CD (13); onde è vero l'enunc. teor.

28. Teor. *Tutti gli angoli retti ABC, ABD; EFG, EFL sono uguali fra loro* (fig. 4).

Infatti considerando la figura EGL sovrapposta all'altra ACD in modo che il punto F cada sul punto B, e che la retta GL si confonda colla CD (*as.* 9.), la retta FE dovrà prendere la direzione BA; poichè se prendesse una direzione BM, diversa da BA, ne verrebbe che dallo stesso punto B potrebbero innalzarsi due perpendicolari BA,BM sulla retta CD, la qual cosa è impossibile (27); dunque adattandosi la FE sulla BA, è vero l'enunc. teor.

29. Teor. *Da un punto A dato fuori di una retta BC non si può abbassare sulla medesima che una sola perpendicolare AB* (fig. 5).

Poichè se se ne potesse abbassare un' altra sia questa AC. Si prolunghi AB d'una quantità BD uguale a BA, si

conduca DC, e si prolunghi verso E. Considerando la figura ACD piegata secondo la CB, in modo che la BA si adatti sulla BD, il punto A combacerà col punto D, la AC colla CD, e gli angoli ACB, ACF cogli angoli DCB, DCF; ma per ipotesi gli angoli ACB, ACF sono retti, dunque pure gli angoli DCB, DCF sono retti; vale a dire che la retta DCE è perpendicolare ad FB (13). Or poichè la retta CE, prolungamento di DC, è diversa della CA, a cagione che per due punti A e D non possono passare due rette distinte AD ed ACD (*as.* 7.), segue che per un punto C, della retta FB, potrebbero sulla medesima innalzarsi due perpendicolari CA, CE; ma ciò è impossibile (27), dunque AC non è perpendicolare a BC; onde è vero l'enunc. teor.

---

30. Teor. *Due angoli adiacenti MBC, MBD che hanno i lati esterni BC, BD in linea retta sono l'uno supplemento dell'altro* (fig. 4.).

Dal punto B s'immagini innalzata sulla CD la perpendicolare BA. Essendo la quantità angolare che si ottiene sommando i due angoli proposti MBC, MBD la stessa di quella che si ottiene sommando in vece i due angoli retti ABC, ABD, segue che la prima somma è uguale alla seconda; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Se uno dei due angoli adiacenti è retto, l'altro sarà pure retto.

Coroll. La somma di tutti gli angoli consecutivi che possono formarsi in un punto di una retta, e dalla stessa parte della medesima, è uguale a due angoli retti.

---

31. Teor. *Due angoli adiacenti ABC, ABD che sono l'uno supplemento dell'altro hanno i lati esterni BC, BD in linea retta* (fig. 6.).

Poichè supponendo che il prolungamento di CB non sia BD ma BE, si avrà la somma dei nuovi angoli ABC, ABE

uguale a quella degli angoli proposti ABC, ABD, perchè ciascuna uguale a due retti (*as.* 2.); onde togliendo di comune l'angolo ABC, rimarrà l'angolo ABD uguale all'angolo ABE, vale a dire la parte uguale al tutto, ciò che è impossibile (*as.* 1.); dunque è pure impossibile che una retta diversa della BD sia per dritto colla BC; onde è vero l'enunc. teor.

---

32. Teor. *Quando due rette AC,DE si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro* (fig. 7.).

Infatti i due angoli ABD,EBC sono uguali fra loro, perchè supplementi del terzo ABE (*as.* 10.); e gli altri due ABE,DBC sono pure uguali fra loro, perchè supplementi del terzo ABD; ma gli angoli ABD,EBC si dicono opposti al vertice, al pari degli altri due ABE,DBC, dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. La somma dei quattro angoli che formano fra loro due rette che si tagliano è uguale a quattro retti.

Coroll. Se uno dei detti angoli è retto, ciascuno degli altri tre sarà pure retto; vale a dire che se la retta AC è perpendicolare a DE, sarà viceversa DE perpendicolare ad AC.

Coroll. La somma di tutti gli angoli consecutivi che possono formarsi in un punto di un piano è uguale a quattro retti.

---

33. Teor. *Se dal punto medio B di una retta CD s'innalzi la perpendicolare BA sulla medesima, ogni punto della perpendicolare sarà egualmente distante dagli estremi della retta CD; ed ogni punto fuori la perpendicolare sarà disugualmente distante da tali estremi* (fig. 8.).

Si congiunga un punto A della perpendicolare cogli estremi C e D. Considerando la figura ABC sovrapposta all'altra ABD in guisa che la AB sia comune, la BC combaccerà colla BD (28), il punto C col punto D, e la AC colla AD; onde sarà AC uguale ad AD.

Si congiunga un punto E, posto fuori la perpendicolare, coi punti C e D, ed il punto F, dove la congiungente ED taglia la perpendicolare, col punto C. La retta EC è minore

della linea spezzata EFC, ma FC è uguale ad FD, dunque EC è minore di ED; onde è vero l'enuc. teor.

Scolio. Se due punti sono egualmente distanti dagli estremi di una retta data, la retta che li congiunge è perpendicolare alla data, e la divide in due parti eguali.

Scolio. Se si congiungono gli estremi di una retta data con un punto posto fuori la perpendicolare che la divide in due parti uguali, di tali congiungenti sarà minore quella che sta tutta da una parte della perpendicolare.

---

34. Teor. *Se da un punto A dato fuori di una retta CB si abbassino sulla medesima, la perpendicolare AB, ed un'obliqua AC, sarà la perpendicolare più corta dell'obliqua* (fig. 5).

Si prolunghi la perpendicolare AB verso D; si prenda BD uguale a BA, e si conduca DC. Considerando la figura ACD piegata secondo la CB, in guisa che la parte ABC si adatti sull'altra DBC, la BA cadrà sulla BD (28), il punto A sul punto D, e la CA sulla CD, onde sarà CA uguale a CD; ma la retta AD è minore della linea spezzata ACD, dunque AB, metà di AD, è pure minore di AC, metà di ACD, (*as.* 6.); onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. La distanza di un punto A ad una retta CB è misurata dalla perpendicolare AB che da quel punto si abbassa sulla retta.

Scolio. Quando due rette s'incontrano le perpendicolari abbassate dai diversi punti dell'una sull'altra, sono tanto più corte, per quanto più i punti che si considerano si avvicinano a quello dove le rette s'incontrano.

Scolio. Il punto B dove la perpendicolare AB incontra la CB si dice *piede della perpendicolare*; ed il punto C dicesi similmente *piede dell'obliqua* AC.

Scolio. La retta CB compresa tra il piede della perpendicolare AB, ed il piede dell'obliqua AC si dice *projezione* dell'obliqua AC.

Scolio. Dei due angoli ACB,ACF, che l'obliqua AC forma colla retta CB, quello che rivolge la sua apertura dalla parte

della perpendicolare, cioè ACB, è acuto: poichè se fosse ottuso, l'angolo ECF, che è uguale a BCD (32), sarebbe pure ottuso, e perciò la somma degli angoli successivi ACB,ACE, ECF, formati in un punto della FB e dalla medesima parte, sarebbe maggiore di due retti, ciò che è impossibile (30).

---

35. Teor. *Se da un punto A, dato fuori di una retta CD, si abbassino sulla medesima due oblique AC, AD egualmente lontane dal piede della perpendicolare AB, saranno tali oblique uguali fra loro* (fig. 9.).

Infatti considerando la figura ACD piegata secondo la AB in modo che la parte ABC si sovrapponga all'altra ABD, la BC combacerà colla BD (28), il punto C col punto D, e l'obliqua AC coll'obliqua AD; onde sarà AC uguale ad AD: dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due oblique che partono dallo stesso punto, e sono egualmente lontane dalla perpendicolare, s'inclinano egualmente tanto alla retta sulla quale sono condotte, quanto alla perpendicolare.

---

36. Teor. *Se da un punto A dato fuori di una retta CD si abbassino sulla medesima due oblique AE, AD disugualmente lontane dal piede della perpendicolare AB, sarà di tali oblique minore quella che è più vicina alla perpendicolare* (fig. 9.).

Dal punto D, più prossimo alla perpendicolare, s'immagini innalzata sulla CD la perpendicolare DF, che taglierà l'obliqua AE in qualche punto F. Essendo la retta AD minore della linea spezzata AFD, ed essendo la perpendicolare FD minore dell'obliqua FE (34), sarà con più ragione AD minore di AF più FE, ovvero minore di AE: dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due oblique eguali non possono esser poste dalla stessa parte della perpendicolare.

Scolio. Da un punto dato fuori di una retta non possono condursi sulla medesima tre oblique uguali fra loro.

Scolio. Se le due oblique date AC, AE non sono poste dalla stessa parte della perpendicolare, in vece di AC si considererà la sua uguale AD.

---

37. Teor. *Se da un punto A dato fuori di una retta CD si abbassino sulla medesima due oblique eguali AC, AD saranno tali oblique egualmente lontane dal piede della perpendicolare AB* (fig. 9).

Poichè se CB e BD sono disuguali, saranno pure disuguali le due oblique AC, AD (36); ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi, dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Le oblique eguali che partono da uno stesso punto della perpendicolare, s'inclinano egualmente tanto alla retta sulla quale sono condotte, quanto alla perpendicolare.

---

38. Teor. *Se da un punto A dato fuori di una retta CD si abbassino sulla medesima due oblique disuguali AC, AE, sarà la minore AC più vicina alla perpendicolare* (fig. 9).

Poichè se CB non è minore di BE, potrà essergli o uguale o maggiore; quindi nel primo caso sarebbe AC uguale ad AE (35); e nel secondo caso sarebbe AC maggiore di AE (36); ma entrambe queste conseguenze sono false, perchè contrarie all'ipotesi, dunque è vero l'enunc. teor.

---

39. *Due oblique AC, AD che partono dallo stesso punto, fanno colla retta CD, sulla quale sono condotte disuguali gli angoli che rivolgono la loro apertura dalla stessa parte* (fig. 10).

Possono darsi due casi: quando la perpendicolare AB cade fra le oblique; e quando cade fuori le medesime. Nel 1.° caso, i due angoli ACE ed ADE sono disuguali, perchè

il primo è acuto, ed il secondo è ottuso (34). — 2.° Caso a partire dal piede D dell'obliqua AD si tagli DE uguale a CB, e dal punto E s'immagini elevata sulla DB la perpendicolare EF, sulla quale presa EF eguale a BA si conduca DF. Considerando la figura ACB sovrapposta all'altra FDE in modo che il punto B cada sul punto E, e che l'angolo retto CBA combaci coll'altro DEF, la retta BA cadrà sulla EF, la BC sulla ED, il punto A sul punto F, il punto C sul punto D, e la AC sulla FD; onde sarà l'angolo ACB uguale all'angolo FDE; ma i due angoli ADB ed FDE sono disuguali, a cagione che il punto F non può cadere sulla AD (34), dunque pure i due angoli ADB ed ACB sono disuguali; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Di due oblique che partono da uno stesso punto, la maggiore è più inclinata alla retta sulla quale sono condotte.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PARALLELE.

Definizioni.

40. Due rette, che sono sullo stesso piano, si dicono dapertutto egualmente distanti quando le perpendicolari abbassate dai diversi punti dell'una sull'altra sono tutte uguali fra loro.

41. Due rette, poste sullo stesso piano, si dicono *parallele* quando serbano fra loro dapertutto la stessa distanza; o ciò che vale lo stesso, quando prolungate indefinitamente non s'incontrano mai.

---

42. Quando due rette parallele AC, DF *(fig. 11.)* vengono intersecate da una terza GL, si formano otto angoli i quali paragonati due a due prendono i nomi seguenti:

Digitized by Google

Gli angoli ABE,DEL si dicono *interno esterno dalla stessa parte*, oppure *corrispondenti*.

Gli angoli ABE,BEF si dicono *alterni interni*.

Gli angoli ABG,FEL si dicono *alterni esterni*.

Gli angoli ABE,DEB si dicono *interni dalla stessa parte*.

Gli angoli ABG,DEL si dicono *esterni dalla stessa parte*.

---

43. Teor. *Per un punto A, dato fuori di una retta BC, non si può condurre alla medesima che una sola parallela AD* (fig. 12).

Perocchè se se ne potesse condurre un'altra AE, abbassando tanto dal punto A, quanto da un'altro punto E della AE, le perpendicolari AB, EC sulla BC, sarebbe ciascuna delle due rette EC, DC uguale alla terza AB (41); e per conseguenza sarebbe pure EC uguale a DC; ma ciò è impossibile, dunque è pure impossibile che AE sia parallela a BC; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro; perocchè se s'incontrassero in qualche punto, potrebbero dal medesimo punto condursi due parallele ad una stessa retta.

---

44. Teor. *Due rette AB, DE che vengono intersecate da una terza BE sono parallele quando due angoli corrispondenti ABE, DEL sono uguali fra loro* (fig. 11.).

Infatti supponendo che le rette AB, DE s'incontrino in qualche punto, si avranno due obblique AB, DE che partono dallo stesso punto, e formano colla BE uguali gli angoli ABE, DEL che rivolgono la loro apertura dalla stessa parte, ma ciò è impossibile (39), dunque è pure impossibile che le rette AB, DE possono incontrarsi; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele fra loro.

45. Teor. *Due rette AB, DE, che vengono intersecate da una terza BE, sono parallele quando due angoli alterni interni ABE, BEF sono uguali fra loro* (fig. 11).

Essendo ciascuno dei due angoli ABE, DEL uguale al terzo BEF, segue che il primo ABE è uguale al secondo DEL; ma questi due angoli ABE, DEL sono corrispondenti, dunque le rette AB, DE sono parallele (44); onde è vero l'enunc. teor.

---

46. Teor. *Due rette AB, DE, che vengono intersecate da una terza BE, sono parallele quando due angoli interni dalla stessa parte ABE, DEB sono l'uno supplemento dell'altro* (fig. 11).

Essendo ciascuno dei due angoli ABE, DEL supplemento del terzo DEB, segue che il primo ABE è uguale al secondo DEL; ma questi due angoli ABE, DEL sono corrispondenti, dunque le rette AB, DE sono parallele (44); onde è vero l'enunc. teor.

---

47. Teor. *Quando due rette parallele AB, DE vengono intersecate da una terza BE, gli angoli corrispondenti ABE, DEL sono uguali fra loro* (fig. 11).

Poichè se l'angolo ABE non è uguale all'angolo DEL, sia ABE uguale ad MEL; sarà perciò la retta ME parallela ad AB (44); ma DE è pure parallela ad AB, dunque per uno stesso punto E possono condursi due parallele ad AB, ciò che è impossibile (43); quindi è pure impossibile che i due angoli ABE, DEL siano disuguali; onde è vero l'enunciato teor.

Coroll. Se la retta BE è perpendicolare ad una delle parallele BA, sarà pure perpendicolare all'altra ED.

---

48. Teor. *Quando due rette parallele AB, DE vengono intersecate da una terza BE, gli angoli alterni interni ABE, BEF sono uguali fra loro* (fig. 11).

Essendo ciascuno degli angoli ABE, BEF uguale al terzo DEL (47), segue che il primo ABE è uguale al secondo BEF; onde è vero l'enunc. teor.

---

49. Teor. *Quando due rette parallele AB, DE vengono intersecate da una terza BE, gli angoli interni dalla stessa parte ABE, DEB sono l'uno supplemento dell'altro* (fig. 11).

Infatti essendo l'angolo DEL supplemento dell'altro DEB, pure l'angolo ABE, che è uguale a DEL (47), sarà supplemento dell'angolo DEB; onde è vero l'enunc. teor.

---

50. Teor. *Due rette AB, CD, che vengono intersecate da una terza BD, s'incontrano quando gli angoli interni dalla stessa parte ABD, CDB non sono l'uno supplemento dell'altro* (fig. 13).

Infatti se le due rette AB, CD non s'incontrano, sono parallele, e perciò l'angolo ABD è supplemento dell'angolo CDB (49); ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi, dunque è pure impossibile che le due rette AB, CD siano parallele; quindi è vero l'enunc. teor.

---

51. Teor. *Due angoli che hanno i lati paralleli e diretti nello stesso senso, o in senso contrario, sono uguali fra loro* (fig. 14).

1.° caso. Siano i due angoli ABC, DEF. Si prolunghi la DE sino in G. L'angolo DEF è uguale all'angolo DGC, perchè corrispondenti (47); per la stessa ragione l'angolo ABC è uguale all'angolo DGC, dunque l'angolo DEF è uguale ad ABC. — *2.° caso.* Siano i due angoli LBM, DEF.

Si prolunghino i lati LB, MB verso C ed A. Essendo l'angolo DEF uguale ad ABC, ed essendo pure l'angolo LBM uguale ad ABC, sarà l'angolo DEF uguale ad LBM; dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. Poichè l'angolo ABC è supplemento dell'altro ABL, sarà pure DEF supplemento di ABL; onde due angoli che hanno i lati paralleli, ma diretti due in un senso e due in senso opposto, sono l'uno supplemento dell'altro.

---

52. Teor. *Due rette parallele AB, CD, comprese fra due altre rette parallele AC, BD, sono uguali fra loro* (fig. 15).

Dai punti A e C si suppongano abbassate sulla BF le perpendicolari AE, CF, che saranno uguali e parallele fra loro (41, 44). I due angoli BAE, DCF essendo uguali (51) sovrapponendo la figura AEB all'altra CFD in modo che la AE combaci colla CF, e che il punto A cada sul punto C, la EB cadrà sulla FD, la AB sulla CD, ed il punto B, intersezione delle rette EB ed AB, cadrà sul punto D, intersezione delle rette FD e CD; onde le due rette AB, CD combaceranno, e perciò saranno uguali; dunque è vero l'enunc. teor.

---

53. Teor. *Se due rette AB, CB s'incontrano, le perpendicolari AD, CD, innalzate sulle medesime, devono pure incontrarsi* (fig. 16).

Si congiungano i punti A e C. Essendo ciascuno degli angoli DAC, DCA minore di un retto, sarà la loro somma minore di due retti, e perciò le due perpendicolari AD, CD devono incontrarsi (50); onde è vero l'enunc. teor.

Digitized by Google

CAPITOLO III.

DEI TRIANGOLI.

Definizioni.

54. Un triangolo quando à i tre lati uguali dicesi *equilatero;* quando ne à due soli uguali dicesi *isoscele;* quando li à tutti e tre disuguali dicesi *scaleno.*

55. Un triangolo quando à un angolo retto dicesi *rettangolo;* quando à un angolo ottuso dicesi *ottusangolo;* quando à tutti i tre angoli acuti dicesi *acutangolo.* Un triangolo che à i tre angoli uguali dicesi *equiangolo.*

Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto dicesi *ipotenusa;* ed i lati che comprendono l'angolo retto diconsi *cateti.*

---

56. Teor. *In ogni triangolo ABC un lato qualunque AC è minore della somma degli altri due, ed è maggiore della loro differenza* (fig. 17).

Infatti essendo AC una linea retta ed ABC una linea spezzata, sarà AC minore di AB più BC; ed essendo AC più BC maggiore di AB, togliendo di comune BC, sarà AC maggiore di AB meno BC (*as.* 4); onde è vero l'enunc. teor.

---

57. Teor. *In ogni triangolo ABC a lati uguali AB, BC si oppongono angoli uguali* (fig. 17).

Essendo le oblique BA, BC uguali fra loro, saranno ugualmente inclinate alla retta AC (37), vale a dire sarà l'angolo A uguale all'angolo C; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Ogni triangolo equilatero è pure equiangolo.

Scolio. Siccome le oblique eguali si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare, e s'inclinano egualmente alla medesima (37), così in ogni triangolo isoscele

ABC la perpendicolare BD abbassata dal vertice B sul lato opposto AC, divide questo lato AC e l'angolo al vertice B in due parti uguali.

Scolio. Per vertice di un triangolo isoscele s'intende quello dell'angolo compreso fra i lati uguali.

---

58. Teor. *In ogni triangolo ABC a lati disuguali AB, BC si oppongono angoli disuguali; e propriamente al lato maggiore BC si oppone l'angolo maggiore A* (fig. 18).

Dal punto D medio del terzo lato AC s'immagini innalzata la perpendicolare DE sul medesimo, e si congiunga il punto E, dove questa incontra il lato maggiore BC, col vertice A; l'angolo BAC è maggiore di EAC; ma l'angolo EAC è uguale all'altro ECA (37), dunque l'angolo BAC è pure maggiore dell'angolo ECA; onde è vero l'enunc. teor.

---

59. Teor. *In ogni triangolo ABC ad angoli uguali A e C, si oppongono lati uguali* (fig. 17).

Poichè se AB fosse maggiore o minore di BC, pure l'angolo C sarebbe maggiore o minore dell'angolo A (58), ma ciò è impossibile, perchè contro l'ipotesi, dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Ogni triangolo equiangolo è pure equilatero.

---

60. Teor. *In ogni triangolo ABC ad angoli disuguali A e C si oppongono lati disuguali; e propriamente all'angolo maggiore A si oppone il lato maggiore BC* (fig. 18).

Poichè se BC fosse uguale o minore di BA, pure l'angolo A sarebbe uguale (57), o minore (58) dell'angolo C; ma entrambe queste conseguenze sono false, perchè contrarie all'ipotesi, dunque è vero l'enunc. teor.

---

61. Teor. *In ogni triangolo ABC la somma degli angoli è uguale a due angoli retti* (fig. 19).

Da un vertice B s'immagini condotta la parallela DE al lato opposto AC. I due angoli DBA,BAC sono uguali, perchè alterni interni (48); i due angoli EBC,BCA sono pure uguali per la stessa ragione; dunque la somma dei due DBA, EBC è uguale alla somma degli altri due A e C; onde aggiungendo di comune l'angolo ABC, sarà la somma dei tre angoli DBA, ABC, CBE uguale alla somma dei tre angoli del triangolo ABC; ma la prima di queste somme è uguale a due retti (30) dunque pure la seconda è uguale a due retti; quindi è vero l'enunc. teor.

Coroll. La somma di due angoli di ogni triangolo è sempre minore di due retti.

Coroll. Ogni triangolo deve avere almeno due angoli acuti.

Coroll. I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono l'uno complemento dell'altro.

Coroll. In ogni triangolo un'angolo è supplemento della somma degli altri due.

---

62. Teor. *In ogni triangolo ABC l'angolo esterno FBC, che si à prolungando un lato AB, è uguale alla somma dei due interni ed opposti A e C* (fig. 19).

Essendo la somma dei due angoli FBC e CBA uguale alla somma dei tre angoli del triangolo, perchè ciascuna uguale a due retti, togliendo di comune l'angolo CBA, si à l'angolo esterno FBC, uguale alla somma dei due A e C; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. In ogni triangolo l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli interni ed opposto.

---

63. Teor. *Due triangoli ABC, DEF sono uguali quando hanno un lato AC uguale ad un lato DF, e gli angoli A e C, adiacenti al primo, rispettivamente uguali agli angoli D ed F, adiacenti al secondo* (fig. 20).

S' immagini il triangolo ABC sovrapposto all'altro DEF in modo che il lato AC combaci col suo uguale DF. Or poichè l'angolo A è uguale all'angolo D, e l'angolo C all'angolo F, il lato AB cadrà sul lato DE, il lato CB sul lato FE, ed il punto B, intersezione di AB e CB, cadrà sul punto E, intersezione di DE ed FE: onde il triangolo ABC combacerà col triangolo DEF e gli sarà uguale; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Dall'eguaglianza dei triangoli ABC, DEF, segue che il terzo angolo B è uguale al terzo angolo E; e che i lati BA e BC, che comprendono il primo, sono rispettivamente uguali ai lati ED ed EF che comprendono il secondo.

Scolio. Se i due angoli uguali in vece di essere tutti e due adiacenti fossero l'uno adiacente e l'altro opposto al lato uguale, il teorema ridurrebbesi al dimostrato, a cagione che il terzo angolo, del primo triangolo, sarebbe uguale al terzo angolo, del secondo triangolo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo un lato e due angoli.

Scolio. Ogni punto della retta che divide in due parti uguali un angolo qualunque, è ugualmente distante dai lati di detto angolo.

---

64. Teor. *Due triangoli ABC, DEF sono uguali quando hanno due lati BA e BC rispettivamente uguali a due lati ED ed EF, e l'angolo B compreso tra i primi, uguale all'angolo E compreso tra i secondi* (fig. 20).

S' immagini il triangolo ABC sovrapposto all'altro DEF in modo che il vertice B cada sul vertice E, e che i lati BA,BC combacino rispettivamente coi lati uguali ED,EF; in tal caso il punto A cadrà sul punto D, il punto C sul punto F ed il terzo lato AC sul terzo lato DF; onde il triangolo ABC combacerà coll'altro DEF e gli sarà uguale; dunque è vero l'enun. teor.

Coroll. Dall'uguaglianza dei due triangoli si à che il terzo lato AC è uguale al terzo lato DF, e che gli angoli A e C, adiacenti al primo, sono rispettivamente uguali agli angoli D ed F adiacenti al secondo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo un angolo ed i lati che lo comprendono.

---

65. Teor. *Due triangoli ABC,DBC sono uguali quando hanno i tre lati AB, BC, AC rispettivamente uguali ai tre lati DB, BC, DC.* (fig. 21).

Si pongano i due triangoli uno accanto all'altro in modo che i lati uguali BC combacino, e che gli angoli ABC, DBC, compresi fra lati uguali, siano adiacenti, e si congiungano i vertici A e D. Essendo per ipotesi AB uguale a BD, ed AC uguale a DC, sarà la BC perpendicolare alla AD e la dividerà in due parti uguali nel punto E (33), cosicchè sarà AE uguale a DE. Ora considerando la figura ABDC piegata secondo la BC in modo che il triangolo ABC si sovrapponga all'altro DBC, la retta EA cadrà sulla ED, ed il punto A sul punto D; onde la AB combacerà colla DB, la AC colla DC, e per conseguenza il triangolo ABC combacerà coll'altro DBC, e gli sarà uguale; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Dall'uguaglianza dei triangoli ABC, DBC segue che i tre angoli A, B, C del primo, sono rispettivamente uguali ai tre angoli D, B, C del secondo.

Scolio. Un triangolo è completamente determinato conoscendo i suoi tre lati.

---

66. Teor. *Due triangoli rettangoli ABC,DBC sono uguali quando hanno l'ipotenusa BA uguale all'ipotenusa BD, ed un cateto BC uguale ad un cateto BC.* (fig. 22).

Si pongano i due triangoli l'uno accanto all'altro in modo che i cateti uguali BC combacino, e che gli angoli retti BCA,BCD siano consecutivi. Essendo la somma dei due

angoli adiacenti BCA,BCD uguale a due retti, i lati esterni CA, CD saranno per dritto; ed essendo le oblique BA, BD uguali, per ipotesi, sarà CA uguale a CD; dunque i due triangoli proposti hanno i tre lati uguali, e perciò sono uguali; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Dall'eguaglianza dei triangoli ABC,DBC segue che il secondo cateto AC è uguale al secondo cateto DC, e che i due angoli acuti A e B sono rispettivamente uguali ai due angoli acuti D e B.

Scolio. Un triangolo rettangolo è completamente determinato conoscendo l'ipotenusa ed un cateto.

Scolio. Dai quattro teoremi precedenti si rileva che in due triangoli uguali sono uguali fra loro quei lati che sono opposti agli angoli uguali; e viceversa sono uguali fra loro quegli angoli che sono opposti ai lati uguali.

---

67. Teor. *Se due triangoli ABC,DBC hanno due lati AB, BC uguali a due lati DB, BC, e l'angolo ABC compreso dai primi è maggiore dell'angolo DBC compreso dai secondi, sarà il terzo lato AC del primo triangolo maggiore del terzo lato DC del secondo triangolo* (fig. 23).

Si pongano i due triangoli l'uno accanto all'altro in modo che i lati uguali BC combacino, e che gli angoli ABC, DBC, compresi tra lati uguali, siano consecutivi: si congiungano i vertici A e D, e s'immagini diviso l'angolo ABD in due parti uguali colla retta BE. Essendo per ipotesi AB uguale a BD il triangolo ABD è isoscele, e per conseguenza la retta BE, che divide l'angolo al vertice ABD in due parti uguali, è perpendicolare alla base AD, e passa pel suo punto medio E (57). Posto ciò la retta BC dividendo in due parti disuguali l'angolo ABD è diversa della retta BE che lo divide in due parti uguali; quindi il punto C, stando fuori la perpendicolare BE innalzata dal punto medio di AD, è disugualmente distante dagli estremi A e D; ma delle due congiungenti AC e CD la CD è posta tutta da una parte della perpendicolare BE, dunque AC è maggiore di CD (33); onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. La proposizione reciproca della dimostrata è parimente vera. In fatti essendo per ipotesi i lati AB, BC rispettivamente uguali ai lati DB, BC, ed il terzo lato AC maggiore del terzo lato DC, l'angolo ABC non può essere nè eguale, nè minore dell'angolo DBC; perocchè sarebbe, contro l'ipotesi, nel primo caso il terzo lato AC uguale al terzo lato CD (64), e nel secondo il terzo lato AC minore del terzo lato DC (67).

CAPITOLO IV.

DEI QUADRILATERI.

Definizioni.

68. Un quadrilatero che à i lati opposti paralleli si dice *parallelogrammo.*

69. Un parallelogrammo che à gli angoli retti si dice *rettangolo.*

70. Un parallelogrammo che à i lati uguali si dice *losanga.*

71. Un parallelogrammo che à gli angoli retti ed i lati uguali si dice *quadrato.*

72. Un quadrilatero che à due soli lati paralleli si dice *trapezio.*

73. La retta che unisce due vertici non successivi di un poligono si dice *diagonale.*

---

74. Teor. *In ogni parallelogrammo ABCD i lati opposti sono uguali, come pure gli angoli opposti.* (fig. 24.)

In fatti i lati AB e DC, oppure AD e BC sono uguali, perchè parallele comprese fra parallele; e gli angoli A e C, oppure B e D sono pure uguali, perchè hanno i lati paralleli e diretti in senso contrario; dunque è vero l'enunc. teor.

75. *Un quadrilatero ABCD che à i lati opposti uguali è un parallelogrammo.* (fig. 24).

Si conduca la diagonale BD. I due triangoli ABD, BDC sono uguali, perchè hanno i tre lati uguali (66); quindi saranno uguali fra loro gli angoli ABD e BDC, perchè opposti a lati uguali; come pure gli angoli ADB e DBC; ma gli angoli ABD e BDC sono alterni interni, rispetto alle rette AB,DC; e gli altri due ADB e DBC sono alterni interni, rispetto alle rette AD,BC; dunque AB è parallela a DC, ed AD è parallela a BC (45); onde il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti paralleli è un parallelogrammo; dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. Ogni parallelogrammo resta diviso in due triangoli uguali da una sua diagonale.

---

76. Teor. *Un quadrilatero ABCD che à due lati opposti AB,DC uguali e paralleli, avrà pure gli altri due uguali e paralleli, e sarà un parallelogrammo.* (fig. 24).

Si conduca la diagonale BD. I due triangoli ABD, BDC sono uguali, perchè hanno il lato BD comune, il lato AB uguale a DC, e l'angolo ABD, compreso tra i primi, eguale all'angolo BDC, compreso dai secondi (64); quindi sarà il terzo lato AD uguale al terzo lato BC, e per conseguenza il quadrilatero ABCD avendo i lati opposti uguali è un parallelogrammo; onde è vero l'enunc. teor.

---

77. Teor. *In ogni parallelogrammo ABCD le diagonali AC, BD si tagliano scambievolmente in parti uguali* (fig. 25).

I due triangoli ABO, DCO sono uguali, perchè hanno il lato AB uguale al lato DC, e gli angoli adiacenti al primo uguali agli angoli adiacenti al secondo (63); quindi saranno gli altri due lati OA ed OB, del primo, uguali agli altri due lati OC ed OD, del secondo; cioè sarà OA uguale ad OC, ed OB uguale ad OD; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Nel caso che il parallelogrammo proposto fosse una losanga, o un quadrato, gli estremi A e C, della diagonale AC, essendo egualmente distanti dagli estremi B e D, dell'altra diagonale BD, segue che AC è perpendicolare a BD (33); onde in ogni losanga, ed in ogni quadrato le diagonali sono l'una perpendicolare all'altra.

---

78. Teor. *In ogni trapezio ABCD la retta EF che unisce i punti medî dei lati non paralleli, è parallela agli altri due lati, ed è uguale alla metà della loro somma* (fig. 26).

Pel punto E, medio di AB, si conduca la retta MN parallela a CD, e si prolunghi CB sino ad incontrare la MN. I due triangoli AEM, BEN sono uguali, perchè hanno il lato AE uguale al lato BE, e gli angoli MAE, MEA, adiacenti al primo, rispettivamente uguali agli angoli EBN, BEN, adiacenti al secondo (63); quindi sarà AM uguale a BN, ed EM uguale ad EN. Nel parallelogrammo MNCD essendo i due lati MN e DC uguali, le loro metà saranno pure uguali, cioè sarà EN uguale ad FC; ma EN è pure parallela ad FC, dunque ENCF è un parallelogrammo (76), e perciò EF è uguale e parallela ad NC.

Essendo AM uguale a BN, sarà MD più NC, ovvero due volte NC o EF, uguale ad AD più BC, e per conseguenza EF uguale alla metà di AD più BC; dunque è vero l'enunc. teor.

---

79. Teor. *In ogni poligono convesso ABCDE la somma degli angoli interni è uguale a tante volte due angoli retti, per quanti sono i lati meno due* (fig. 27).

Si congiunga un vertice qualunque A coi vertici D e C di tutti gli angoli opposti: si avrà così 1.° che il poligono resterà diviso in tanti triangoli per quanti sono i lati meno due, a cagione che questi triangoli hanno per vertice comune A e per base i lati del poligono meno i due che

comprendono il detto angolo A; 2.° che la somma degli angoli di tutti questi triangoli, è precisamente uguale alla somma degli angoli del poligono; or poichè la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti (61), la somma degli angoli interni del poligono è uguale a due retti ripetuti tante volte per quanti sono i triangoli che lo compongono, ovvero per quanti sono i suoi lati meno due; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. La somma degli angoli interni d'un quadrilatero è uguale a quattro retti; di un pentagono a sei; di un'esagono ad otto; di un'ettagono a dieci; di un'ottagono a dodici; etc. etc.

CAPITOLO V.

DEL CERCHIO E DELLA CIRCONFERENZA.

Definizioni.

80. *La circonferenza* è una linea curva che à tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno che dicesi *centro*.

81. *Il cerchio* è la figura piana limitata dalla circonferenza.

82. La distanza di un punto qualunque della circonferenza dal centro dicesi *raggio*.

Tutti i raggi sono uguali fra loro.

83. La retta che passa pel centro e termina d'ambe le parti alla circonferenza, dicesi *diametro*.

Tutti i diametri sono uguali fra loro e doppi dei raggi.

84. Una parte qualunque della circonferenza dicesi *arco*.

85. La retta che unisce le due estremità di un arco si dice *corda* o *sottesa*.

86. La porzione di cerchio compresa fra l'arco e la sua corda si dice *segmento*.

87. La porzione di cerchio compresa fra l'arco ed i raggi che passano pei suoi estremi dicesi *settore*.

88. Un angolo che à il vertice al centro si dice *angolo al centro*.

89. Un angolo che à il vertice alla circonferenza, ed i lati del quale sono corde, si dice *angolo alla circonferenza* o *iscritto*.

90. Una retta che à due punti di comune colla circonferenza si dice *secante*.

91. Una retta che à un sol punto di comune colla circonferenza si dice *tangente* alla medesima, ed il punto comune si dice *punto di contatto*.

92. Due circonferenze che hanno un sol punto di comune si dicono l'una tangente dell'altra.

---

93. Teor. *Una retta non può intersecare una circonferenza in più di due punti.*

Poichè se potesse intersecarla almeno in tre, congiunti li medesimi col centro si avrebbero tre oblique rispetto alla secante, e tre raggi rispetto al cerchio; ma i raggi sono tutti uguali fra loro, dunque da uno stesso punto potrebbero su di una retta condursi tre oblique uguali, ciò ch'è impossibile (36); dunque è pure impossibile che una retta possa intersecare una circonferenza in più di due punti; onde è vero l'enunc. teor.

---

94. Teor. *Ogni diametro AD divide la circonferenza ed il cerchio in due parti uguali* (fig. 28).

Infatti sovrapponendo la figura AED all'altra ABD, in modo che abbiano il diametro AD comune, l'arco AED dovrà combaciare coll'arco ABD; poichè se ciò non avvenisse, vi sarebbero dei punti della circonferenza disugual-

mente lontani dal centro, ciò che è assurdo; quindi i due archi AED, ABD combaciando, combaceranno pure le figure AED, ABD; onde è vero l'enunc. teor.

---

95. Teor. *La retta AD perpendicolare all'estremo di un diametro AB è tangente al cerchio* (fig. 29).

Poichè qualunque altra retta CD, che dal centro C si conduce sulla AD essendo, come obliqua, maggiore della perpendicolare CA, ovvero del raggio, avrà il suo estremo D fuori la circonferenza; dunque la retta AD avendo il solo punto A di comune colla circonferenza è tangente alla medesima; onde è vero l'enunc. teor.

---

96. Teor. *Il diametro AB che passa pel punto di contatto A è perpendicolare alla tangente AD* (fig. 29).

Infatti essendo la retta AD una tangente, tutti i suoi punti, tranne il punto di contatto A, sono fuori la circonferenza, onde il raggio CA è minore di ogni altra retta CD che dal centro si conduce sulla AD; ma di tutte le rette che da un punto possono condursi su di un'altra retta la più corta è la perpendicolare, dunque CA è perpendicolare ad AD; quindi è vero l'enunc. teor.

---

97. Teor. *Il diametro AB perpendicolare ad una corda DE divide la corda e l'arco sotteso in due parti uguali* (fig. 30).

Si consideri la figura ADBE piegata secondo il diametro AB, in modo che il semicerchio ADB combaci coll'altro AEB; è chiaro che la retta FD si adatterà sul suo prolungamento FE; ed il punto D sul punto E; per conseguenza sarà DF uguale ad EF, e l'arco BD uguale all'arco BE; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Il centro di un cerchio, il punto medio di una corda, ed i punti medî degli archi sottesi dalla medesima, sono posti sullo stesso diametro perpendicolare alla detta corda; onde la retta che soddisfa a due delle quattro condizioni cennate soddisferà pure alle altre.

---

98. Teor. *Due rette parallele intercettano sulla circonferenza archi uguali* (fig. 31).

Siano le tangenti AC, LN, e le secanti DE, FG perpendicolari al diametro BM. Essendo gli archi BD, BF rispettivamente uguali agli archi BE, BG (97), sarà l'arco DF, differenza dei primi, uguale all'arco EG, differenza dei secondi; ma gli archi DF, EG sono compresi fra le due parallele DE,FG, tutte e due secanti; gli archi BD, BE sono compresi fra le parallele AC, DE, l'una tangente e l'altra secante; e le semicirconferenze BDM, BEM sono comprese fra le parallele AC, LN, tutte due tangenti; dunque è vero l'enunc. teor.

---

99. Teor. *Ogni angolo iscritto è metà dell' angolo al centro che comprende fra i suoi lati lo stesso arco del primo* (fig. 32).

Possono darsi tre casi: 1.° che il centro stia su di un lato dell'angolo; 2.° che stia dentro dell'angolo; 3.° che stia fuori dell'angolo.

1.° *Caso.* Sia l'angolo ABD. Si conduca il raggio AC. Nel triangolo isoscele ACB i due angoli ABC,BAC sono uguali; ma la loro somma è uguale all'angolo esterno ACD (62), dunque uno di essi ABC è metà di ACD.

2.° *Caso.* Sia l'angolo ABE. Si conduca il diametro BD ed i raggi AC,CE. Essendo ciascuno degli angoli ABD,DBE metà di ciascuno degli angoli ACD,DCE, sarà l'angolo ABE, somma dei primi, metà dell'angolo ACE somma dei secondi.

3.° *Caso.* Sia l'angolo FBE. Si conduca il diametro BD, ed i raggi CF,CE. Essendo ciascuno degli angoli FBD, EBD

metà di ciascuno degli angoli FCD,ECD, sarà l'angolo FBE, differenza dei primi, metà dell'angolo FCE differenza dei secondi; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Gli angoli iscritti nello stesso, o in uguali segmenti sono uguali fra loro, perchè metà dello stesso angolo al centro.

---

100. Teor. *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali se due angoli al centro ACB,DCE sono uguali, gli archi intercetti saranno pure uguali; e reciprocamente.* (fig. 33.)

Essendo per ipotesi l'angolo ACB uguale all'angolo DCE, se il settore ACB si sovrappone all'altro DCE, in modo che il raggio CA combaci col raggio CD, il raggio CB combacerà coll'altro CE, e perciò l'arco AB coll'arco DE; onde sarà arco AB uguale ad arco DE.

Reciprocamente; essendo l'arco AB uguale all'arco DE, sovrapponendo il settore ACB all'altro DCE, in modo che il raggio AC combaci col raggio DC, e l'arco AB cada sull'arco DE, il punto B cadrà sul punto E, il raggio CB sul raggio CE, e l'angolo ACB combacerà coll'angolo DCE; onde è vero l'enunc. teor.

---

101. Teor. *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, di due angoli al centro ACF,DCE il maggiore ACF intercetta l'arco maggiore; e reciprocamente.* (fig. 33).

Dall'angolo maggiore ACF si tagli la parte ACB uguale all'angolo DCE; sarà l'arco AB uguale all'arco DE (100); ma l'arco AB è minore di ABF, dunque pure l'arco DE è minore di ABF.

Reciprocamente; essendo l'arco ABF maggiore dell'arco DE, se dall'arco ABF si tagli la parte AB uguale a DE, e si congiunga il punto B col centro C, sarà l'angolo ACB uguale all'angolo DCE, ma l'angolo ACB è minore dell'altro ACF, dunque pure l'angolo DCE è minore dell'angolo ACF; onde è vero l'enunc. teor.

102. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due angoli al centro ACB, DCE stanno fra loro come gli archi intercetti.* (fig. 34).

Dall' angolo maggiore ACB si tagli l'angolo ACF uguale a DCE; sarà l'arco AF uguale all'arco DE.

1. *Caso.* Siano i due archi AB,AF commensurabili, e propriamente sia

arc.AB : arc.AF :: 6 : 2

Si divida l'arco AB in sei parti uguali, e si congiungano i punti di divisione col centro C. È chiaro, per effetto dell' ipotesi, che l'arco AF conterrà due delle dette parti uguali, e per conseguenza che l'angolo ACF conterrà pure due degli angoli parziali che compongono l'angolo ACB; onde si avrà la proporzione

ang.ACB : ang.ACF :: 6 : 2,

che paragonata alla precedente, dà la proporzione

ang.ACB : ang.ACF :: arc.AB : arc.AF..... (*a*)

2. *Caso.* Siano i due archi AB,AF incommensurabili, si avrà, ciò non pertanto, la stessa conseguenza precedente; poichè se ciò è falso il quarto termine della proporzione sia arc.AM in vece di arc.AF; cioè sia

ang.ACB : ang.ACF :: arc.AB : arc.AM.

Si divida l'arco AB in parti uguali, ciascuna minore di FM, e si congiunga il punto di divisione N, che cadrà necessariamente tra i punti F ed M, col centro C. I due archi AB ed AN essendo commensurabili si à la proporzione

ang.ACB : ang.ACN :: arc.AB : arc.AN,

che paragonata alla precedente, dà per conseguenza la proporzione

ang.ACF : ang.ACN :: arc.AM : arc.AN;

la quale è falsa, perchè mentre l'angolo ACF è minore dell'angolo ACN, l'arco AM è al contrario maggiore dell'arco AN; dunque il quarto termine della proporzione (*a*) non può essere diverso di arco AF, e perciò è vero l'enunc. teor.

---

103. Teor. *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, corde uguali AB, DE sottendono archi uguali; e reciprocamente* (fig. 33).

Si conducano i raggi CA, CB, CD, CE. Essendo per ipotesi la corda AB uguale alla corda DE i due triangoli ACB, DCE sono uguali, perchè hanno i tre lati uguali; e perciò sarà l'angolo ACB uguale all'angolo DCE, e quindi l'arco AB uguale all'arco DE.

Reciprocamente; essendo l'arco AB uguale all'arco DE, sarà l'angolo ACB uguale all'angolo DCE, e perciò i due triangoli ACB, DCE avendo un'angolo uguale compreso fra lati uguali, sono uguali; e sarà il terzo lato AB, uguale al terzo lato DE; ma AB e DE sono le corde degli archi dati, dunque è vero l'enunc. teor.

---

104. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde AF, DE la maggiore AF sottende l'arco maggiore; e reciprocamente.* (fig. 33).

Si conducano i raggi CA, CF, CD, CE. Nei due triangoli ACF, DCE essendo i due lati AC, CF uguali ai due lati DC, CE, ed il terzo AF maggiore, per ipotesi, del terzo DE, sarà l'angolo ACF maggiore dell'angolo DCE (67), e per conseguenza l'arco AF maggiore dell'arco DE (101).

Reciprocamente; essendo l'arco AF maggiore dell'arco DE, sarà l'angolo ACF maggiore dell'angolo DCE (101); quindi nei due triangoli ACF, DCE essendo due lati AC, CF uguali a due lati DC, CE, e l'angolo ACF, compreso tra i primi, maggiore dell'angolo DCE, compreso dai secondi, sarà il terzo lato AF del primo, maggiore del terzo lato DE del

secondo (67); ma AF e DE sono le corde degli archi dati, dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. Questo teorema è vero solo quando ciascuno degli archi che si considera è minore della semicirconferenza.

---

105. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due corde uguali AB, DE distano ugualmente dal centro; e reciprocamente* (fig. 35.).

Dai centri C si abbassino le perdendicolari CF, CH sulle corde, e si conducano i raggi AC, DC. I due triangoli rettangoli ACF, DCH hanno le ipotenuse AC, DC uguali; hanno i cateti AF, DH pure uguali (*as.* 5.), dunque sono uguali; sarà perciò CF uguale a CH.

Reciprocamente: supponendo CF uguale a CH si à pure, dall'eguaglianza dei detti triangoli ACF e DCH, che il terzo lato AF, del primo, è uguale al terzo lato DH, del secondo; e per conseguenza la corda AB, doppia di AF, è uguale alla corda DE, doppia di DH (*as.* 5.); dunque è vero l'enunc. teorema.

---

106. Teor. *Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde AB, GT la maggiore AB è più vicina al centro; e reciprocamente* (fig. 35.)

Si conducano i raggi CL, CM rispettivamente perpendicolari alle corde AB, GT; sull'arco maggiore ALB si tagli, a partire dal punto medio L, l'arco LN uguale all'arco MT, e si conduca pel punto N la corda NO perpendicolare al raggio CL. Essendo gli archi OLN, GMT uguali, le loro corde ON, GT sono pure uguali (103), e perciò CP è uguale a CR (105); ma CF è minore di CP, dunque CF è pure minore di CR.

Reciprocamente sia CF minore di CR. Sul raggio CL si tagli CP uguale a CR e si conduca pel punto P la corda NPO perpendicolare a CL. Le due corde ON, GT essendo

uguali, pure gli archi OLN, GMT sono uguali (103); ma essendo l'arco ALB maggiore dell'arco OLN, pure la corda AB sarà maggiore della corda ON, ovvero della corda uguale GT; dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. La massima corda che può condursi in un cerchio è il diametro; vale a dire che ogni corda è minore del diametro.

---

107. Teor. *Per tre punti A, B, D non posti in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza di cerchio* (fig. 36).

Si congiungano fra loro i punti A e B, B e D; dai punti E ed F, medî delle rette AB e BD, s'innalzino sulle medesime le perpendicolari EC, FC, e si congiunga il loro punto d'incontro C coi punti A, B, D.

Essendo il punto C comune tanto alla perpendicolare EC, quanto all'altra FC, sarà l'obliqua CB uguale a ciascuna delle due CA, CD (33); onde se col centro C e con una delle oblique CA, CB, CD come raggio si descrive una circonferenza, la medesima passerà pei punti dati A, B, D.

Scolio. Poichè il centro della circonferenza che passa pei tre punti dati A, B, D dev'essere comune alle due perpendicolari EC, FC; e poichè due rette non possono avere di comune che un punto solo; segue che per tre punti, non posti in linea retta, non si può far passare che una sola circonferenza.

Coroll. Due circonferenze non possono avere di comune più di due punti; perchè se ne avessero almeno tre coinciderebbero.

---

108. Teor. *Se due circonferenze hanno un punto comune B, posto fuori la retta AC dei centri, necessariamente ne avranno un altro, e perciò si taglieranno.* (fig. 37).

Sulla retta AC dei centri si supponga abbassata dal punto comune B la perpendicolare BD, sulla quale si tagli MD

uguale ad MB. Il punto A essendo posto sulla perpendicolare AC che passa pel punto medio di BD, sarà egualmente distante dai punti B e D; onde la circonferenza che à per centro A e passa per B; passerà pure per D: per una simile ragione la circonferenza che à per centro C e passa per B passerà pure per D; dunque il punto D è comune alle due circonferenze proposte, e perciò è vero l'enunc. teor.

Scolio. Quando due circonferenze si toccano, il punto di contatto deve necessariamente cadere sulla retta dei centri.

---

109. Teor. *Se due circonferenze si tagliano la distanza dei centri è minore della somma dei raggi; ed è maggiore della loro differenza* (fig. 37).

Si congiungano i centri A e C con uno dei punti d'intersezione B. Dal triangolo ABC, che à per lati la distanza AC dei centri ed i raggi AB e BC, si à AC minore di AB più BC; ed AC maggiore di AB meno BC (56); onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Se due circonferenze si toccano il punto di contatto stando sulla retta dei centri, sarà la distanza dei medesimi uguale alla somma dei raggi, quando le due circonferenze si toccano esternamente; e sarà uguale alla differenza dei raggi quando si toccano internamente.

Scolio. Se due circonferenze non si tagliano nè si toccano potranno esser poste o l'una fuori dell'altra, o l'una dentro dell'altra: nel 1.° caso la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi; e nel 2.° caso la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.

---

110. Teor. *Se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi, ed è maggiore della loro differenza le due circonferenze si taglieranno.*

Poichè se le due circonferenze non si tagliano potranno, stando l'una fuori dell'altra, o toccarsi o non toc-

Digitized by Google

carsi; stando l'una dentro dell'altra, o toccarsi o non toccarsi; nel 1.° caso sarebbe la distanza dei centri uguale o maggiore della somma dei raggi; e nel 2.° caso sarebbe la distanza dei centri uguale o minore della differenza dei raggi; ma ciascuna di queste conseguenze è falsa, perchè contraria all'ipotesi, dunque le due circonferenze devono necessariamente tagliarsi; onde è vero l'enunc. teor.

CAPITOLO VI.

MISURA DEI TRIANGOLI E DEI QUADRILATERI.

Definizioni.

111. *L'altezza* di un triangolo è la perpendicolare abbassata da un suo vertice sul lato opposto, prolungato se occorre.

Il lato sul quale si abbassa la perpendicolare dicesi *base* del triangolo.

112. *L'altezza* di un parallelogrammo è la distanza di due lati opposti, uno dei quali dicesi *base*.

113. *L'altezza* di un trapezio è la distanza dei due lati paralleli, che diconsi *basi*.

114. Due figure si dicono *equivalenti* quando sono uguali in superficie.

115. La superficie di una figura piana si dice propriamente *area* o *aja*, quando si considera misurata o paragonata a quella di un'altra figura piana.

116. Teor. *Due rettangoli AC,EG che hanno le basi AB,EF uguali, e le altezze AD, EL uguali, sono uguali* (fig. 38).

Infatti sovrapponendo il rettangolo AC all'altro EG, in modo che la base AB combaci colla base EF, i lati AD e BC combaceranno coi lati EL ed FG, e quindi il rettangolo AC col rettangolo EG; onde è vero l'enunc. teor.

117. Teor. *Due rettangoli AD, AE che hanno la stessa altezza AF, stanno fra loro come le basi AC,AB* (fig. 39).

Si considerino i due rettangoli l'uno sovrapposto all'altro in modo che abbiano l'altezza AF di comune.

1.° *Caso.* Siano le due basi AC, AB commensurabili, e sia propriamente

$$AC : AB :: 5 : 3$$

Si supponga divisa la AC in cinque parti uguali, e si avrà, per effetto dell'ipotesi, che di queste parti la AB ne conterrà tre. Da ciascun punto di divisione s'innalzi sulla AC la perpendicolare, e si prolunghi sino alla retta FD. Essendo i rettangoli parziali che compongono il rettangolo AD, uguali fra loro, ed essendo tre di questi rettangoli contenuti nel rettangolo AE, si avrà, considerando uno di tali rettangoli parziali come unità, la proporzione

$$AD : AE :: 5 : 3;$$

la quale avendo colla precedente una ragione di comune, dà per conseguenza,

$$AD : AE :: AC : AB$$

2.° *Caso.* Siano le basi AC, AB incommensurabili; si avrà, ciò non pertanto la stessa conseguenza precedente,

$$AD : AE :: AC : AB.$$

Poichè se ciò è falso sia AG, in vece di AB, il quarto termine della proporzione, cioè sia,

$$AD : AE :: AC : AG$$

Si divida la AC in parti uguali, ciascuna minore di BG, e dal punto di divisione M, che cade necessariamente tra i punti B e G, s'immagini innalzata sulla AC la perpendico-

lare MN. I due rettangoli AD, AN avendo le basi AC, AM commensurabili, danno la proporzione

$$AD : AN :: AC : AM;$$

che paragonata alla precedente, dà la proporzione

$$AE : AN :: AG : AM;$$

la quale è visibilmente falsa; perchè mentre AE è minore di AN, AG è al contrario maggiore di AM; onde è impossibile che il quarto termine della proporzione

$$AD : AE :: AC : AB$$

sia diverso di AB, e perciò è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due rettangoli che hanno la stessa base stanno fra loro come le rispettive altezze.

---

118. Teor. *Due rettangoli AC, BF stanno fra loro come i prodotti delle basi AB, BE, per le rispettive altezze BC, BG* (fig. 40).

Si pongano i due rettangoli l'uno accanto all'altro, in modo che abbiano le basi AB, BE per dritto, e si prolunghi DC sino ad incontrare il lato EF. I due rettangoli AC, BL avendo la stessa altezza BC stanno come le basi (117), e perciò

$$AC : BL :: AB : BE;$$

similmente i due rettangoli BL, BF avendo la stessa base BE, stanno come le altezze, e perciò

$$BL : BF :: BC : BG;$$

onde moltiplicando fra loro queste due proporzioni si à la seguente

$$AC.BL : BL.BF :: AB.BC : BE.BG;$$

dalla quale si à in fine

$$AC : BF :: AB.BC : BE.BG ;$$

quindi è vero l'enunc. teor.

Scolio. Per virtù del teorema dimostrato, *il prodotto della base per l'altezza di un rettangolo si ritiene come misura dell'aja di esso rettangolo.*

Scolio. Il prodotto della base per l'altezza di un rettangolo, ovvero il prodotto delle unità lineari contenute nella base per quelle contenute nell'altezza, indica il numero delle unità superficiali che sono contenute nell'aja del rettangolo.

Scolio. L'unità superficiale è il quadrato che à per lato l'unità lineare.

---

119. Teor. *Ogni parallelogrammo AC è equivalente al rettangolo AE, che à la stessa base, e la stessa altezza* (fig. 41).

Le due figure AC, AE avendo la stessa base AB e la stessa altezza AF, avranno le basi superiori DC, FE sulla medesima retta. I due triangoli rettangoli AFD, BEC sono uguali perchè hanno le ipotenuse AD e BC uguali, ed i cateti AF, BE pure uguali; per conseguenza togliendo dalla intera figura ABCF ora il triangolo AFD, ed ora l'altro BEC, si avranno due resti uguali; ma il primo di tali resti è il parallelogrammo ABCD; il secondo è il rettangolo ABEF; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. L'aja di un parallelogrammo è uguale al prodotto della base per l'altezza.

Coroll. I parallelogrammi stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Coroll. I parallelogrammi che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti; quelli che hanno la stessa base stanno fra loro come le altezze; e quelli che hanno la stessa altezza stanno come le basi.

---

120. Teor. *Ogni triangolo ABD è metà del rettangolo ABEF che à la stessa base e la stessa altezza* (fig. 41).

Dal punto B si conduca la parallela BC al lato AD, e si prolunghi la DE finchè incontri la detta parallela in un punto C. Il quadrilatero ABCD, che è un parallelogrammo, è equivalente al rettangolo ABEF, che à la stessa base, e la stessa altezza; onde il triangolo ADB, che è metà del parallelogrammo ABCD, sarà pure metà del rettangolo ABEF; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. L'aja d'un triangolo è uguale alla metà del prodotto della base per l'altezza.

Coroll. Due triangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Coroll. I triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti; quelli che hanno la stessa base stanno fra loro come le altezze; e quelli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.

---

121. Teor. *Ogni trapezio ABCD è la somma di due triangoli che hanno per altezza e per basi, l'altezza DE, e le basi AB, DC del trapezio* (fig. 42).

Infatti conducendo la diagonale BD il trapezio resterà diviso nei due triangoli ADB e DBC, che hanno per altezza comune l'altezza DE del trapezio, e per basi il primo la base inferiore AB, ed il secondo la base superiore DC; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. L'aja di un trapezio è uguale al prodotto della sua altezza per la semisomma delle basi.

Scolio. Poichè in ogni trapezio la semisomma delle basi è uguale alla retta che congiunge i punti medî dei lati non paralleli, può dirsi pure che... *l'aja di un trapezio è uguale al prodotto della sua altezza per la retta che unisce i punti medî dei lati non paralleli.*

Scolio. L'aja di un poligono qualunque è uguale alla somma dei triangoli nei quali resta diviso conducendo da un suo vertice le diagonali a tutti gli altri vertici.

Digitized by Google

CAPITOLO VII.

MISURA DEGLI ANGOLI.

Nozioni preliminari.

122. Ogni circonferenza si considera divisa in 360 parti uguali, che diconsi gradi; ogni grado si divide in 60 parti uguali, che diconsi minuti primi; ogni minuto primo in 60 parti uguali, che diconsi minuti secondi etc. etc.

La quarta parte della circonferenza dicesi quadrante.

A cagione che la grandezza di un' angolo al centro e l'arco intercetto tra i suoi lati hanno fra loro tale legame che aumentando o diminuendo il primo, aumenta o diminuisce, nello stesso rapporto, pure il secondo, *si ritiene come misura di un' angolo al centro l' arco intercetto fra i suoi lati*; o più propriamente il numero di gradi e minuti contenuti in tale arco; cosicchè nella misura di un' angolo non si considera la lunghezza effettiva dell' arco intercetto fra i suoi lati, ma il numero di gradi e minuti che in esso si contengono.

L' angolo retto, che è l' unità di misura degli angoli, *à per misura il quadrante*, che è l' unità di misura degli archi.

---

123. Teor. *Ogni angolo iscritto ABD à per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati* (fig. 43).

Si conducano i raggi CA, CD. L' angolo iscritto ABD è metà dell' angolo al centro ACD (99); ma quest' angolo ACD à per misura l' arco AD, dunque l' angolo ABD à per misura la metà dell' arco AD; onde è vero l' enunc. teor.

Coroll. L'angolo iscritto nel semicerchio è retto; l'angolo iscritto nel segmento maggiore del semicerchio è acuto; e l'angolo iscritto nel segmento minore del semicerchio è ottuso.

Coroll. Gli angoli opposti di un quadrilatero iscritto sono l'uno supplemento dell'altro.

Coroll. Di due angoli supplementi, se uno à per misura la metà di una parte della circonferenza, l'altro avrà per misura la metà dell'altra parte.

Scolio. I quadrilateri che possono iscriversi nel cerchio sono quelli nei quali si verifica la condizione che gli angoli opposti sono l'uno supplemento dell'altro.

---

124. Teor. *L'angolo formato da una tangente AB e da una corda AD à per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.* (fig. 44).

Pel punto D s'immagini condotta la retta DE parallela alla tangente CB. I due angoli EDA, DAB sono uguali, perchè alterni interni; ma il primo EDA à per misura la metà del l'arco AE, dunque pure il secondo DAB à per misura la metà dello stesso arco AE, ovvero la metà dell'arco uguale AFD; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Poichè l'angolo BAD à per misura la metà dell'arco AFD; il suo supplemento CAD avrà per misura la metà dell'altr'arco AED.

---

125. Teor. *Un'angolo CAE, che à il vertice dentro o fuori la circonferenza, à per misura la metà della somma, o della differenza degli archi CE, BD intercetti tra i suoi lati.* (fig. 45).

Dal punto B, dove uno dei lati incontra la circonferenza, s'immagini condotta la parallela BF all'altro lato AE; sarà l'arco BD uguale all'arco FE (98). I due angoli CAE, CBF sono uguali, perchè corrispondenti; ma l'angolo CBF à per

misura la metà dell'arco CF, dunque pure l'angolo CAE à per misura la metà dello stesso arco CF; ma l'arco CF è uguale alla somma dei due archi CE e DB (X), oppure alla loro differenza (Y); dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. Questo teorema è pure vero quando uno dei lati dell'angolo, o tutti e due sono tangenti alla circonferenza.

Digitized by Google

LIBRO II.

CAPITOLO I.

DELLE RETTE PROPORZIONALI, E DELLE FIGURE SIMILI.

Definizioni.

126. Due figure si dicono *simili* quando avendo esattamente la stessa forma differiscono solo per grandezza; ovvero quando hanno gli angoli uguali ed i lati *omologhi* proporzionali.

127. In due figure simili si dicono lati *omologhi* quelli che sono opposti, o adiacenti ad angoli uguali: e vertici *omologhi*, i vertici degli angoli uguali.

---

128. Teor. *In ogni triangolo ABC la retta DE parallela ad un lato AC, divide gli altri due in parti proporzionali.* (fig. 1).

Si conducano le rette AE,DC. I due triangoli ADE,CDE sono equivalenti, perchè hanno la base comune DE, ed i vertici A e C su di una retta parallela alla medesima. I due triangoli BED, AED avendo le basi BD,AD per dritto, ed il vertice E comune, hanno la stessa altezza e perciò stanno come le basi (120); onde

$$BDE : ADE :: BD : DA$$

Per una simile ragione i due triangoli BDE, CDE danno la proporzione

$$BDE : CDE :: BE : EC,$$

che paragonata alla precedente, dà per conseguenza

$$BD : DA :: BE : EC;$$

onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due rette finite, che partono dallo stesso punto, vengono divise in parti proporzionali dalle rette parallele che le intersecano.

Scolio. Dalla proporzione precedente, componendo, si à

$$BA : DA :: BC : EC;$$

oppure

$$BA : BD :: BC : BE.$$

Scolio. Essendo DF parallela a BC, ed essendo DE uguale ad FC, si à la proporzione

$$BA : BD :: CA : DE;$$

la quale insieme alla precedente dà

$$BA : BD :: BC : BE :: AC : DE.$$

Da questa conseguenza si rileva che i due triangoli ABC, DBE oltre agli angoli uguali, hanno i lati omologhi proporzionali, e perciò sono simili; dunque se si divide un triangolo con una retta parallela ad un lato, il triangolo totale ed il triangolo parziale sono simili fra loro.

---

129. Teor. *La retta DE che divide in parti proporzionali due lati AB, BC di un triangolo ABC, è parallela al terzo.* (fig. 2).

Poichè supponendo che non sia DE parallela ad AC, ma in vece DF, si avrà (128)

$$BD : DA :: BF : FC;$$

ma per effetto dell' ipotesi si à pure

$$BD : DA :: BE : EC,$$

dunque

$$BF : FC :: BE : EC;$$

ma questa proporzione è falsa, perchè mentre il primo antecedente è maggiore del secondo, il primo conseguente è al contrario minore del secondo; dunque è pure falso che la retta DF, diversa da DE, sia parallela ad AC; onde è vero l'enunc. teor.

---

130. Teor. *In ogni triangolo ABC la retta BD, che divide per metà un angolo B, divide il lato opposto in due parti proporzionali ai lati di detto angolo.* (fig. 3).

Dal vertice A si conduca alla BD la parallela AE, che si prolunghi sino ad incontrare il lato CB prolungato. Essendo l'angolo ABD uguale al suo alterno interno BAE, e l'angolo CBD uguale al suo corrispondente BEA, sarà, poichè ABD è uguale a CBD, l'angolo BEA uguale all'angolo BAE, e per conseguenza BE uguale a BA. Nel triangolo ACE, essendo BD parallela ad AE, sarà

$$CB : BE :: CD : DA$$

ovvero, ponendo in vece di BE la sua uguale BA,

$$CB : BA :: CD : DA;$$

onde è vero l'enunc. teor.

---

131. Teor. *Due triangoli equiangoli ABC, DEF sono simili* (fig. 4).

Siano gli angoli A, B, C rispettivamente uguali agli angoli D, E, F. Si sovrapponga il triangolo DEF all'altro ABC, in modo che gli angoli uguali E e B combacino, e che il lato ED cada sul suo omologo BA, cosicchè BMN sia la nuova posizione del triangolo DEF. Essendo per ipotesi l'angolo A uguale all'angolo D, ovvero all'angolo BMN, sarà la retta MN parallela ad AC, e per conse-

guenza il triangolo ABC sarà simile al triangolo MBN, ed al suo uguale DEF; onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice uguali sono equiangoli e simili.

Coroll. Due triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto uguale sono equiangoli e simili.

Scolio. In due triangoli equiangoli i lati opposti agli angoli uguali sono i lati proporzionali.

---

132. Teor. *Due triangoli ABC, DEF che hanno i lati rispettivamente proporzionali sono simili* (fig. 4).

Siano i lati AB, BC, AC rispettivamente proporzionali ai lati DE, EF, DF. Sul lato AB, proporzionale ad ED, si tagli BM uguale ad ED, e si conduca MN parallela ad AC.

Essendo MN parallela ad AC si à (128)

$$AB : BC : AC :: BM : BN : MN;$$

ma per ipotesi si à pure

$$AB : BC : AC :: DE : EF : DF,$$

dunque

$$BM : BN : MN :: DE : EF : DF;$$

e poichè BM è uguale a DE, sarà pure BN uguale ad EF, ed MN uguale a DF; e perciò i due triangoli BMN, EDF avendo i lati uguali sono uguali; ma il triangolo BMN è simile a BAC, dunque pure il triangolo EDF è simile a BAC; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. In due triangoli che hanno i lati proporzionali, gli angoli opposti ai lati proporzionali sono uguali.

Scolio. Dai due teoremi precedenti segue che nei triangoli i due caratteri della similitudine sono talmente legati fra loro che ammessone uno si à l'altro come conseguenza.

---

133. Teor. *Due triangoli ABC, DEF che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali sono simili* (fig. 4).

Sia l'angolo B uguale all'angolo E; ed i lati BA e BC, rispettivamente proporzionali ai lati ED ed EF. Si consideri il triangolo DEF sovrapposto all'altro ABC in modo che l'angolo E combaci col suo uguale B, e che il lato ED cada sul suo omologo BA; cosicchè BMN sia la nuova posizione del triangolo EDF. Avendosi, per supposizione

$$BA : BC :: ED : EF,$$

ovvero

$$BA : BC :: BM : BN,$$

segue che la retta MN è parallela ad AC, e per conseguenza che il triangolo ABC è simile al triangolo MBN, ed al suo uguale DEF; onde è vero l'enunc. teor.

---

134. Teor. *Due triangoli ABC, DEF che hanno i lati rispettivamente paralleli sono simili* (fig. 5).

Siano i lati AB, BC, AC rispettivamente paralleli ai lati DE, EF, DF. I due angoli A e D sono uguali, perchè hanno i lati paralleli; per la stessa ragione i due angoli B ed E sono pure uguali, dunque i due triangoli ABC, DEF hanno due angoli uguali a due angoli, e perciò sono equiangoli e simili (131); onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. In due triangoli che hanno i lati paralleli, i lati omologhi sono i lati paralleli.

---

135. Teor. *Due triangoli ABC, LMN che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono simili* (fig. 5).

Siano i lati AB, BC, AC rispettivamente perpendicolari ai lati LM, MN, NL. Dai vertici M, N, L si conducano ai lati LM, MN, LN le perpendicolari DE, EF, DF, le quali saranno rispettivamente parallele ai lati AB, BC, AC

del triangolo ABC (44). Nel triangolo DLM, rettangolo in M, l'angolo acuto D è complemento dell'altro DLM, ma l'angolo NLM è pure complemento di DLM, dunque l'angolo D è uguale all'altro NLM. Similmente nel triangolo FLN, rettangolo in L, l'angolo acuto F è complemento dell'altro FNL, ma l'angolo MNL è pure complemento di FNL, dunque l'angolo F è uguale all'altro MNL; onde i due triangoli DEF,LMN avendo due angoli uguali a due angoli sono equiangoli e simili (131); ma i due triangoli ABC,DEF sono pure equiangoli e simili, perchè hanno i lati rispettivamente paralleli, dunque pure il triangolo ABC è equiangolo e simile al triangolo LMN; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. In due triangoli che hanno i lati perpendicolari, i lati omologhi sono i lati perpendicolari.

---

136. Teor. *Due poligoni ABCD ed EFGL, che sono composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili fra loro* (fig. 6).

I due triangoli ABC, EFG essendo simili e similmente posti, saranno gli angoli A, B, C del primo, rispettivamente uguali agli angoli E, F, G del secondo; e sarà inoltre

$$AB : EF :: BC : FG :: AC : EG.$$

Parimente i due triangoli ACD, EGL essendo simili e similmente posti saranno gli angoli A, C, D del primo, rispettivamente uguali agli angoli E, G, L del secondo; e sarà inoltre

$$AC : EG :: CD : GL :: AD : EL.$$

Dalle dette relazioni si à che gli angoli A, B, C, D, del poligono ABCD sono rispettivamente uguali agli angoli E, F, G, L, del poligono EFGL; e si à pure, a cagione del rapporto AC : EG comune alle due serie di rapporti enunciati, che

$$AB : EF :: BC : FG :: CD : GL :: DA : LE;$$

onde i due poligoni avendo gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali sono simili; perciò è vero l'enunc. teor.

Scolio. Se i triangoli che compongono ciascuno dei due poligoni in vece di avere per vertice comune un vertice del poligono, avessero per vertice comune un punto qualunque preso dentro del medesimo, il teorema sussisterebbe sempre, e si dimostrerebbe egualmente.

---

137. Teor. *Due poligoni simili ABCD ed EFGL, sono composti dello stesso numero di triangoli simili, e similmente posti* (fig. 6).

Siano gli angoli A, B, C, D rispettivamente uguali agli angoli E, F, G, L; e sia inoltre

$$AB : EF :: BC : FG :: CD : GL :: DA : LE.$$

Da due vertici omologhi A ed E si conducano le diagonali a tutti gli altri vertici. Essendo l'angolo B uguale all'angolo F, ed i lati AB e BC, che comprendono il primo, proporzionali ai lati EF ed FG, che comprendono il secondo, sarà il triangolo ABC simile all'altro EFG (133), e per conseguenza sarà l'angolo BCA uguale all'angolo FGE, e sarà inoltre

$$BC : FG :: AC : EG;$$

ma si à pure

$$BC : FG :: CD : GL,$$

dunque

$$AC : EG :: CD : GL.$$

Essendo gli angoli BCD e BCA rispettivamente uguali agli angoli FGL ed FGE, sarà l'angolo ACD, differenza dei primi, uguale all'angolo EGL, differenza dei secondi; ma la proporzione precedente mostra che questi due angoli sono compresi fra lati rispettivamente proporzionali, dunque il triangolo ACD è simile all'altro EGL; onde essendo ciascuno dei triangoli che compongono il poligono ABCD simile e

similmente posto che ciascuno dei triangoli che compongono il poligono EFGL, è vero l'enunc. teor.

Scolio. Si è detto innanzi che nei triangoli le due condizioni della similitudine sono talmente connesse fra loro che ammessane una si à l'altra come conseguenza; ma nei poligoni di più di tre lati tale dipendenza non si verifica. Questa diversità nasce da che nei triangoli non si può alterare la proporzionalità dei lati senza alterare gli angoli, e viceversa; mentre nei poligoni di più di tre lati si può alterare la proporzionalità dei lati senza alterare gli angoli, e viceversa. In fatti in un poligono qualunque basta condurre una parallela ad un lato, per avere un nuovo poligono equiangolo al dato, ma i cui lati non hanno fra loro gli stessi rapporti di quelli del poligono dato. E viceversa basta alterare nel poligono dato uno degli angoli per averne un altro cogli stessi lati ma con angoli diversi, almeno in parte.

---

138. Teor. *Due triangoli simili ABC, DEF stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi* (fig. 7).

Da due vertici omologhi B ed E si suppongano abbassate le perpendicolari BM, EN sui lati opposti. I due triangoli rettangoli ABM, DEN avendo gli angoli acuti A e D uguali, sono equiangoli e simili (131), e perciò

$$AB : DE :: BM : EN;$$

ma

$$AB : DE :: AC : DF,$$

dunque

$$BM : EN :: AC : DF;$$

moltiplicando questa proporzione per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

si avrà

$$AC.BM : DF.EN :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2,$$

ma si à pure (120)

$$ABC : DEF :: AC.BM : DF.EN ;$$

dunque

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2 ;$$

onde è vero l' enunc. teor.

---

139. Teor. *Due poligoni simili ABCD, EFGL stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi* (fig. 6).

Da due vertici omologhi A ed E si conducano le diagonali a tutti gli altri vertici. Essendo ciascuno dei triangoli che compongono il poligono ABCD simile a ciascuno di quelli che compongono il poligono EFGL (137), si avrà

$$ABC : EFG :: \overline{BC}^2 : \overline{FG}^2 ,$$

ed

$$ACD : EGL :: \overline{CD}^2 : \overline{GL}^2 ;$$

ma si à pure

$$\overline{BC}^2 : \overline{FC}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{GL}^2 ,$$

dunque

$$ABC : EFG :: ACD : EGL ;$$

ma quando si hanno più rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente, dunque

$$ABCD : EFGL :: ABC : EFG ;$$

e per conseguenza

$$ABCD : EFGL :: \overline{BC}^2 : \overline{FG}^2 ;$$

onde è vero l'enunc. teor.

---

140. Teor. *I perimetri dei poligoni simili ABCD, EFGL stanno fra loro come i lati omologhi* (fig. 6).

I due poligoni ABCD, EFGL essendo simili si à

AB : EF :: BC : FG :: CD : GL :: DA : LE ;

ma quando si hanno più rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente, dunque

perim.ABCD : perim.EFGL :: AB : EF ;

onde è vero l'enunc. teor.

CAPITOLO II.

PROPRIETÀ RELATIVE DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI FATTI SU TALUNE RETTE.

141. Teor. *Il quadrato di una retta AC, che è somma di due altre AB e BC, è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, più due volte il rettangolo delle medesime* (fig. 8).

Sulla AC si formi il quadrato AD; sulla AE si tagli AF uguale ad AB, e dai punti B ed F si conducano le rette BG ed FL rispettivamente perpendicolari alle AC ed AE. Essendo AC uguale ad AE, ed AB uguale ad AF sarà BC uguale ad FE, ovvero ML uguale ad MG; onde la figura AM è il quadrato della retta AB; la figura MD è il quadrato della retta BC; e le figure ME ed MC sono i due rettangoli che hanno per lati le due rette AB e BC; ma queste quattro figure AM, MD, ME, MC compongono il quadrato della retta AC; dunque è vero l'enunc. teor.

Digitized by Google

142. Teor. *Il quadrato di una retta AB, che è differenza di due altre AC e BC, è uguale alla somma dei quadrati di queste due rette, meno due volte il rettangolo delle medesime* (fig. 8).

Sulla retta maggiore AC si faccia la stessa costruzione precedente, e sulla BC si costruisca il quadrato BN. Essendo le due figure ME ed MD uguali rispettivamente alle altre due MC e BN, sarà il rettangolo EL, che è somma delle prime, uguale all'altro MN, che è somma delle seconde; ma il quadrato AM, della retta differenza AB, è uguale al quadrato AD, della retta AC, più il quadrato BN, dell'altra retta BC, meno i due rettangoli EL ed MN, che hanno per lati le medesime rette AC e BC; dunque è vero l'enunc. teor.

---

143. Teor. *In ogni triangolo rettangolo ABC il quadrato AN della ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati BF e BL dei cateti* (fig. 10).

Dal vertice dell'angolo retto B si abbassi sulla ipotenusa la perpendicolare BD, e si prolunghi sino in P; si congiungano i punti B ed N, A ed L. I due triangoli BCN ed ACL sono uguali, perchè hanno i lati BC e CN uguali rispettivamente ai lati LC ed AC, e l'angolo BCN compreso fra' primi, uguale all'angolo ACL compreso tra' secondi, perchè ciascuno composto di un'angolo retto e dell'angolo comune BCA; ma il triangolo BCN è metà del rettangolo DN, che à la stessa base CN, e la stessa altezza CD (120); ed il triangolo LAC è metà del quadrato BL, che à la stessa base CL, e la stessa altezza CB, a cagione che le rette BA e BE sono per dritto (31), dunque il rettangolo DN è equivalente al quadrato BL (*as.* 5). Allo stesso modo si dimostrerà che il rettangolo DM è equivalente al quadrato BF; onde la somma dei due rettangoli AP e DN, ovvero il quadrato AN dell'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati BL e BF dei cateti; dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. In ogni triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto.

Scolio. Paragonando ciascuno dei rettangoli AP e DN col quadrato AN si à (ponendo in vece dei rettangoli AP e DN i quadrati equivalenti $\overline{AB}^2$ e $\overline{BC}^2$) (119)

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AD : AC,$$

e

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: DC : AC;$$

e paragonando fra loro li detti rettangoli si à

$$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AD : DC.$$

Di queste tre proporzioni le prime due mostrano che.... il quadrato di un cateto sta al quadrato dell'ipotenusa come il cateto suddetto sta alla sua projezione sulla ipotenusa; e la terza che i quadrati dei cateti stanno fra loro come le loro projezioni sull'ipotenusa.

Scolio. Dall'essere i quadrati BF e BL rispettivamente equivalenti ai rettangoli AP e DN, si à

$$\overline{AB}^2 = AD \,.\, AC, \quad \text{donde} \quad AD : AB :: AB : AC;$$

e

$$\overline{BC}^2 = DC \,.\, AC, \quad \text{donde} \quad DC : BC :: BC : AC;$$

vale a dire che... in ogni triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al rettangolo che à per lati la projezione di tal cateto sulla ipotenusa, è l'ipotenusa medesima; oppure che... un cateto è medio proporzionale tra la sua projezione sulla ipotenusa, e l'ipotenusa medesima.

Scolio. Siccome l'angolo ABC iscritto nel semicerchio è retto, i due enunciati ora detti danno luogo ai seguenti:

In ogni cerchio... il quadrato di una corda è uguale al rettangolo che à per lati la projezione della corda sul dia-

metro che passa per un suo estremo, ed il diametro intero; oppure... ogni corda è media proporzionale tra la sua projezione sul diametro che passa per un suo estremo, ed il diametro intero.

Scolio. Siccome le figure simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi (139), costruendone tre qualunque su' lati di un triangolo rettangolo, sarà quella costruita sull' ipotenusa, uguale alla somma di quelle costruite sui cateti.

---

144. Teor. *In ogni triangolo ABC il quadrato del lato BC opposto all' angolo ottuso A, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che sul medesimo à l' altro lato* (fig. 11).

Dal vertice B, di uno degli altri due angoli, si consideri abbassata sul lato opposto la perpendicolare BD. Essendo la retta DC somma delle due AD ed AC, sarà il quadrato della DC uguale al quadrato della AD, più il quadrato della AC, più due volte il rettangolo della AD per la AC (141); onde aggiungendo all' una parte ed all' altra il quadrato della perpendicolare BD, sarà il quadrato di BD più il quadrato di DC, ovvero il quadrato di BC, uguale al quadrato di BD più il quadrato di AD, ovvero al quadrato di AB, più il quadrato di AC, più due volte il rettangolo di AD per AC; onde è vero l' enunc. teor.

---

145. Teor. *In ogni triangolo ABC il quadrato del lato AB, opposto all' angolo acuto C, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che sul medesimo à l' altro lato* (fig. 11).

Dal vertice B, di uno degli altri due angoli, si consideri abbassata sul lato opposto la perpendicolare BD. Essendo la retta AD differenza delle due DC ed AC, sarà il quadrato di AD uguale al quadrato di DC, più il quadrato di AC, meno due

volte il rettangolo di DC per AC (142); onde, aggiungendo all'una parte ed all'altra il quadrato della perpendicolare BD, sarà il quadrato di BD più il quadrato di AD, ovvero il quadrato di AB, uguale al quadrato di BD più il quadrato di DC, ovvero al quadrato di BC, più il quadrato di AC, meno due volte il rettangolo di DC per AC; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Dai tre teoremi precedenti si rileva che il solo triangolo rettangolo à la proprietà che il quadrato di un lato è uguale alla somma o alla differenza dei quadrati degli altri due lati.

---

146. Teor. *Se da un punto E preso dentro di un cerchio si conducono due corde AC e BD, il rettangolo delle parti dell'una sarà equivalente al rettangolo delle parti dell'altra* (fig. 12).

Si congiungano i punti A e B, D e C. I due triangoli ABE, DCE hanno gli angoli in E uguali, perchè verticali; l'angolo A uguale all'angolo D, perchè iscritti nello stesso segmento, dunque sono equiangoli e simili; sarà perciò

$$AE : ED :: EB : EC,$$

e per conseguenza

$$AE.EC = EB.ED;$$

onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due corde che si tagliano in un cerchio si dividono in parti reciprocamente proporzionali.

Scolio. Se le due corde sono fra loro perpendicolari, ed una di esse AC è diametro, sarà ED uguale ad EB (97); e perciò

$$AE : EB :: EB : EC;$$

donde

$$\overline{EB}^2 = AE . EC;$$

vale a dire che ... la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i segmenti dello stesso; oppure che ... il quadrato della perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è uguale al rettangolo dei due segmenti dello stesso.

---

147. Teor. *Se da un punto E preso fuori di un cerchio, si conducono due secanti EA ed ED, terminate alla parte concava, il rettangolo di una di queste nella sua parte esterna, sarà equivalente al rettangolo dell' altra pure nella sua parte esterna* (fig. 13).

Si congiungano i punti A e C, B e D. I due triangoli AEC,DEB hanno l'angolo E comune; l'angolo A uguale all'angolo D, perchè iscritti nello stesso segmento, dunque sono equiangoli e simili, e perciò si avrà

$$AE : ED :: EC : EB;$$

donde si ricava

$$AE . EB = ED . EC;$$

quindi è vero l'enunc. teor.

Coroll. Due secanti che partono da uno stesso punto fuori del cerchio, sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne.

---

148. Teor. *Se da un punto B preso fuori di un cerchio, si conduca una tangente BA, ed una secante BC terminata alla parte concava, il quadrato della tangente sarà equivalente al rettangolo della secante nella sua parte esterna* (fig. 14).

Si congiunga il punto di contatto A coi punti C e D. I due triangoli ABD, ABC hanno l'angolo B comune; l'angolo BAD uguale all'angolo BCA, perchè misurati dalla metà

dello stesso arco AD, dunque sono equiangoli e simili, e perciò si avrà

$$BC : BA :: BA : BD;$$

donde si ricava

$$\overline{BA}^2 = BC.BD;$$

dunque è vero l'enunc. teor.

Coroll. Se una tangente ed una secante partono dallo stesso punto, sarà la tangente media proporzionale tra la secante intera e la sua parte esterna.

CAPITOLO III.

DEI POLIGONI REGOLARI.

Definizioni.

149. Quando tutti i vertici di un poligono sono su di una circonferenza, il poligono si dice *iscritto* nella circonferenza, e la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.

150. Quando tutti i lati di un poligono sono tangenti ad una circonferenza, il poligono si dice *circoscritto* alla circonferenza, e la circonferenza si dice *iscritta* nel poligono.

151. Un poligono si dice *regolare* quando à gli angoli uguali ed i lati uguali.

---

152. Teor. *Ad ogni poligono regolare ABCDE può essere circoscritta o iscritta una circonferenza* (fig. 15).

Si dividano per metà due angoli successivi A e B colle rette AO e BO, e si congiunga il punto O, dove queste s'intersecano, cogli altri vertici del poligono. I due triangoli ABO e BOC sono uguali, perchè hanno l'angolo ABO uguale all'angolo OBC, ed i lati AB e BO, che comprendono il primo, uguali ai lati BC e BO che comprendono il secondo; ma

nel triangolo ABO gli angoli alla base AB sono uguali, dunque pure nel triangolo BCO gli angoli alla base BC saranno uguali; e perciò sarà l'angolo BCO la metà dell'intero angolo C del poligono, ovvero sarà l'angolo BCO uguale all'altro OCD. Allo stesso modo si dimostrerà che il triangolo BOC è uguale all'altro COD; che il triangolo COD è uguale all'altro DOE etc.; onde li triangoli AOB, BOC, COD etc, essendo tutti uguali fra loro, ed avendo gli angoli alle basi uguali, saranno i lati OE, OD, OC, OB, OA pure uguali fra loro; e per conseguenza se col centro O e con una di tali rette come raggio, si descrive una circonferenza, la medesima passerà per tutti i vertici A, B, C, D, E, e sarà perciò circoscritta al poligono.

Essendo le corde AB, BC, etc. uguali fra loro, pure le perpendicolari OM, abbassate sulle medesime dal centro O, saranno uguali fra loro (105); onde descrivendo col centro O, e con una di tali perpendicolari OM come raggio, una circonferenza, la medesima passerà pei punti M, e sarà tangente a ciascuno dei lati AB, BC, CD etc., del poligono ABCDE; onde è vero l'enunc. teor.

Scolio. Il punto O, centro del cerchio tanto circoscritto che iscritto, si dice pure *centro del poligono;* e ciascuno degli angoli AOB, BOC etc., che si à congiungendo il centro con due vertici successivi, si dice *angolo al centro.*

Coroll. Gli angoli al centro di un poligono regolare sono uguali fra loro, e ciascuno è uguale a quattro angoli retti divisi pel numero dei lati del poligono.

Coroll. Le rette che congiungono il centro di un poligono regolare con i vertici dividono per metà gli angoli del poligono.

---

153. Teor. *Due poligoni regolari ABCDE, FGLMN dello stesso numero di lati sono simili* (fig. 16).

In ciascuno dei poligoni si congiunga il centro coi vertici. I triangoli AOB, BOC, etc., sono uguali ed isosceli, al pari dei triangoli FRG, GRL etc.; ma tanto nei primi che nei secondi gli angoli ai vertici O ed R sono uguali, perchè

ciascuno è la stessa parte di quattro retti, dunque tutti li detti triangoli isosceli sono simili fra loro; onde i due poligoni ABCDE, FGLMN, essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili (136); perciò è vero l'enunc. teor.

Coroll. I perimetri dei poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno come i lati, e le superficie come i quadrati dei lati.

---

154. Teor. *I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati ABCDE, FGLMN, stanno come i raggi dei cerchi iscritti, o circoscritti; e le superficie come i quadrati dei medesimi raggi* (fig. 16).

Si congiunga il centro O coi vertici C e D, e si abbassi OQ perpendicolare a CD; similmente si congiunga il centro R coi vertici M ed L, e si abbassi RT perpendicolare ad ML. Essendo i due triangoli ODC ed RML simili fra loro, ed essendo i due triangoli rettangoli ODQ ed RMT pure simili fra loro, si avrà

$$DC : ML :: OD : RM \quad \text{ed} \quad OD : RM :: OQ : RT;$$

donde

$$DC : ML :: OD : RM :: OQ : RT$$

e quindi

$$\overline{DC}^2 : \overline{ML}^2 :: \overline{OD}^2 : \overline{RM}^2 :: \overline{OQ}^2 : \overline{RT}^2;$$

ma, indicando con P e p i perimetri dei due poligoni, e con S ed s le superficie, si à pure

$$P : p :: DC : ML \quad \text{ed} \quad S : s :: \overline{DC}^2 : \overline{ML}^2,$$

dunque

$$P : p :: OD : RM :: OQ : RT$$

ed

$$S : s :: \overline{OD}^2 : \overline{RM}^2 :: \overline{OQ}^2 : \overline{RT}^2;$$

onde è vero l'enunc. teor.

155. Teor. *L'aja di un poligono regolare ABCDE è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto* (fig. 16).

Si congiungano i vertici del poligono col centro O, e si abbassi OQ perpendicolare su di CD. Essendo i triangoli AOB, BOC etc. uguali fra loro, l'aja del poligono sarà uguale ad uno di essi COD ripetuto tante volte per quanti sono i lati del poligono; ma l'aja del triangolo COD è uguale alla base CD moltiplicata per la metà dell'altezza OQ (120), dunque l'aja del poligono ABCDE è uguale a cinque volte la base CD, ovvero al perimetro ABCDE, moltiplicato per la metà di OQ, che è il raggio del cerchio iscritto; onde è vero l'enunc. teor.

---

156. Teor. *Se si congiungono i vertici A,B,C,D,E, di un poligono regolare col centro O, e si uniscono fra loro i punti* a, b, c, d, e *dove queste rette tagliano la circonferenza iscritta, si avrà un poligono regolare iscritto nella medesima, e simile al dato* (fig. 17).

Essendo i triangoli AOB, BOC, etc. tutti uguali ed isosceli, al pari dei triangoli *aob*, *boc*, etc. ed avendo tanto i primi che i secondi gli angoli al vertice O uguali, segue che tutti li detti triangoli sono simili; onde li due poligoni ABCDE, *abcde* essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili (136); perciò è vero l'enunc. teor.

Scolio. I lati del nuovo poligono dividendo i raggi AO, BO, CO etc. in parti proporzionali, risulteranno paralleli a quelli del poligono dato (129); per conseguenza gli archi uguali *ab*, *bc* etc. resteranno divisi per metà nei punti di contatto *f*, *g*, etc. (98); onde congiungendo fra loro tali punti di contatto, si avrà un altro poligono regolare iscritto *fglmn*, pure simile al dato. Reciprocamente se dai punti medî degli archi che sottendono i lati di un poligono regolare iscritto oppure dai vertici del medesimo, si conducono le tangenti

al cerchio, si avranno due poligoni regolari circoscritti simili allo iscritto.

Scolio. Dato un poligono regolare circoscritto in un cerchio si può sempre iscrivere nel medesimo un poligono regolare simile; e viceversa.

---

157. Teor. *Se si congiungono i vertici di un poligono regolare iscritto* abcd *coi punti medî degli archi sottesi dai suoi lati, si avrà un poligono regolare iscritto di un doppio numero di lati del dato* (fig. 18).

Si congiungano i vertici *a,b,c,d* coi punti medî *f,g,l,m* degli archi sottesi dai lati *ab,bc,cd,da*. Il poligono *afbg*... è regolare a cagione che à i lati uguali, perchè corde di archi uguali, e gli angoli uguali, perchè iscritti in uguali segmenti; dippiù è di un doppio numero di lati del dato, dunque è vero l'enunc. teor.

Scolio. Poichè conducendo pei vertici del nuovo poligolo iscritto *afbg*... le tangenti al cerchio si à (256) un poligono regolare circoscritto simile ad *afbg*... e perciò di un doppio numero di lati tanto del poligono iscritto *abcd*, quanto del poligono simile circoscritto ABCD; può dirsi che avendo un poligono regolare circoscritto se pei punti medî degli archi compresi fra i punti di contatto dei suoi lati colla circonferenza si conducono le tangenti alla medesima, queste formeranno coi lati del poligono dato un nuovo poligono circoscritto di un doppio numero di lati del dato.

Scolio. Siccome avendo un poligono regolare iscritto se ne può sempre iscrivere un secondo di un doppio numero di lati del 1.°, indi un 3.° di un doppio numero di lati del 2.° etc.; è chiaro che progredendo in tale operazione si avranno dei poligoni regolari iscritti i cui perimetri andranno di più in più avvicinandosi alla circonferenza data, a cagione che i lati dei medesimi vanno sempre più impiccolendo; onde se tale costruzione potesse continuarsi sino ad ottenere un poligono d'infiniti lati, il suo perimetro dovrebbe confondersi colla circonferenza, il raggio della

quale sarebbe, in tal caso, lo stesso che il raggio del cerchio iscritto nel poligono cennato. È per tale osservazione che la circonferenza del cerchio può considerarsi come il perimetro di un poligono regolare d'infiniti lati infinitamente piccoli.

CAPITOLO IV.

DELL' AJA DEL CERCHIO E DEL RAPPORTO DELLA CIRCONFERENZA AL DIAMETRO.

158. Definiz. Due archi, due segmenti, due settori si dicono simili quando corrispondono ad angoli al centro uguali, in cerchi disuguali.

---

159. Teor. *L'aja del cerchio è uguale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio.*

Infatti considerando il cerchio come un poligono regolare d'infiniti lati, la sua aja sarà uguale al perimetro, ovvero alla circonferenza, moltiplicata per la metà del raggio (155); onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. L'aja del cerchio è uguale a quella del rettangolo che à per base la circonferenza, e per altezza la metà del raggio; onde rappresentando con *cir.R* e *sup.R* la circonferenza e la superficie del cerchio il cui raggio è R, si avrà

$$\text{sup.R} = \tfrac{1}{2}\text{R} \times \text{cir.R}$$

Scolio. Dal teorema dimostrato segue che l'aja del cer-

chio dipende dalla lunghezza della circonferenza, e perciò potrà ottenersi esattamente conoscendo il rapporto della circonferenza al diametro.

---

160. Teor. *L'aja di un settore ABC è uguale al suo arco AB moltiplicato per la metà del raggio* (fig. 19).

Infatti poichè

$$\text{sup.AC} : \text{sett.ABC} :: \text{cir.AC} : \text{arc.AB},$$

sarà pure

$$\text{sup.AC} : \text{sett.ABC} :: \tfrac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{cir.AC} : \tfrac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{arc.AB};$$

e poichè gli antecedenti di questa proporzione sono uguali, pure i conseguenti lo saranno, e si avrà perciò

$$\text{sett.ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{AC} \times \text{arc.AB};$$

onde è vero l'enunc. teor.

Coroll. L'aja di un segmento AMB è uguale a quella del settore ACB, meno quella del triangolo ACB.

---

161. Teor. *Le circonferenze dei cerchi stanno fra loro come i raggi, e le aje come i quadrati dei raggi.*

Essendosi già dimostrato che i perimetri dei poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno come i raggi dei cerchi iscritti, e le aje come i quadrati di tali raggi (154), considerando i cerchi come poligoni regolari di uno stesso numero di lati, segue che è vero l'enunc. teor.

Coroll. Essendo R ed r i raggi di due cerchi diversi, sarà

$$\text{cir.R} : \text{cir.}r :: \text{R} : r :: 2\text{R} : 2r;$$

donde

$$\frac{\text{cir.R}}{2\text{R}} = \frac{\text{cir.}r}{2r};$$

vale a dire che il rapporto di ogni circonferenza al suo diametro è una quantità costante.

Scolio. Il rapporto della circonferenza al diametro è una quantità *incommensurabile.* Per tale rapporto, che si rappresenta ordinariamente colla lettera greca π (leggi *pi*), si hanno i tre valori approssimati seguenti

$$\pi = \frac{22}{7}; \quad \pi = \frac{355}{113}; \quad \pi = 3{,}141592.....$$

Di questi valori il primo è dovuto ad *Archimede*, ed è approssimato sino ai centesimi; il secondo è dovuto a *Mezio*, ed è approssimato sino ai milionesimi; ed il terzo, che è espresso in cifre decimali, si è calcolato sino alla 155.ª cifra, delle quali cifre le prime sei sono quelle riportate.

---

162. Teor. *Gli archi simili stanno fra loro come i raggi, ed i settori simili come i quadrati dei raggi* (fig. 19).

Infatti poichè

arc.AB : cir.AC :: ang.C : 4 retti,

ed

arc.DE : cir.DF :: ang.F : 4 retti,

si avrà

arc.AB : arc.DE :: cir.AC : cir.DF;

ma si à pure

cir.AC : cir.DF :: AC : DF,

dunque

arc.AB : arc.DF :: AC : DF.

Similmente poichè

sett.ABC : sup.AC :: ang.C : 4 retti,

e

sett.DEF : sup.DF :: ang.F : 4 retti,

sarà

$$\text{sett.ABC} : \text{sett.DEF} :: \text{sup.AC} : \text{sup.DF};$$

ma si à pure

$$\text{sup.AC} : \text{sup.DF} :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2,$$

dunque

$$\text{sett.ABC} : \text{sett.DEF} :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2;$$

quindi è vero l'enunc. teor.

---

163. Prob. *Dati i lati AB e CD di due poligoni regolari simili di* n *lati l'uno iscritto e l'altro circoscritto, si vuole il perimetro del poligono tanto iscritto che circoscritto di* 2n *lati* (fig. 20).

Si congiunga il centro O col punto di contatto E; dai punti A e B si conducano le tangenti AF e BG, e si congiunga il punto E coi punti A e B, ed il centro O coi punti F e G. Sarà AE il lato del poligono iscritto cercato (157), e quindi $2n$AE il perimetro; e sarà FG il lato del poligono circoscritto simile cercato (157), e quindi $2n$FG il perimetro.

Si rappresentino i perimetri nAB ed nCD con p_n e P_n, ed i perimetri $2n$AE e $2n$FG con p_{2n} e P_{2n}.

Dal triangolo COE, essendo l'angolo COE diviso per metà dalla retta OF, si à (130)

$$CF : FE :: OC : OE, \quad \text{ovvero} \quad CF : FE :: OC : OA;$$

ma a cagione di AB parallela a CD si à pure

$$CD : AB :: OC : OA, \quad \text{dunque} \quad CF : FE :: CD : AB;$$

onde componendo e moltiplicando quindi per due i termini del primo rapporto si à

$$CD : FG :: AB + CD : AB,$$

ovvero

$$nCD : 2nFG :: nAB + nCD : 2nAB ;$$

donde si ricava

$$2nFG = \frac{2nAB \times nCD}{nAB + nCD},$$

e quindi

$$P_{2n} = \frac{2p_n \times P_n}{p_n + P_n}.$$

Essendo AE media proporzionale tra EM, ossia 2EO, ed EL (143), si à

$$2EO : AE :: AE : EL ;$$

ma a cagione dei due triangoli ALE ed FEO, che hanno i lati perpendicolari, si à pure (135)

$$EO : AL :: EF : EL,$$

ovvero

$$2EO : AB :: EF : EL$$

dunque

$$AB : AE :: AE : EF,$$

ovvero

$$2nAB : 2nAE :: 2nAE : 2nEF ;$$

donde si ricava

$$2nAE = \sqrt{nAB \times 2nFG},$$

e quindi

$$p_{2n} = \sqrt{p_n \times P_{2n}}$$

—

164. Prob. *Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.*

Nelle formole precedenti

$$P_{2n} = \frac{2p_n \times P_n}{p_n + P_n}; \qquad p_{2n} = \sqrt{p_n \times P_{2n}}$$

facendo successivamente $n=4$, $n=8$, $n=16$ etc. si avranno le formole

$$P_8 = \frac{2p_4 \times P_4}{p_4 + P_4}; \qquad p_8 = \sqrt{p_4 \times P_8} \ldots \qquad (1)$$

$$P_{16} = \frac{2p_8 \times P_8}{p_8 + P_8}; \qquad p_{16} = \sqrt{p_8 \times P_{16}} \ldots \qquad (2)$$

$$P_{32} = \frac{2p_{16} \times P_{16}}{p_{16} + P_{16}}; \qquad p_{32} = \sqrt{p_{16} \times P_{32}} \ldots \qquad (3)$$

etc. ; etc.

dalle quali, conoscendo in numeri i perimetri di due quadrati l'uno iscritto e l'altro circoscritto, potranno successivamente ottenersi, pure in numeri, i perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti di 8, 16, 32, 64 etc. lati; e poichè il lato del quadrato iscritto nel cerchio di raggio R è uguale ad $R\sqrt{2}$, e quello del quadrato circoscritto è uguale a 2R, così supponendo che il diametro di tal cerchio sia l'unità, si avrà pel perimetro del quadrato iscritto $p_4 = 2\sqrt{2}$; e per quello circoscritto $P_4 = 4$. Sostituendo dunque questi valori numerici di p_4 e P_4 nelle due formole (1) si avranno i valori numerici di P_8 e p_8, che sostituiti alla lor volta nelle due formole (2) daranno i valori numerici di P_{16} e p_{16}; così continuando si è calcolato il quadro quì appresso riportato, dal quale si scorge che essendo i perimetri dei due poligoni regolari simili iscritto e circoscritto di 8192 lati rappresentati da due numeri decimali che hanno di comune le prime sei cifre, può senza

Digitized by Google

sensibile errore ritenersi che lo stesso numero 3,141592... rappresenti il valore numerico approssimativo della circonferenza fra loro compresa; ma questa circonferenza à per diametro l'unità, e quando il diametro è uno, circ.R è uguale a $\frac{\text{cir.R}}{2\text{R}}$ ovvero a π, dunque il numero costante π, ovvero il rapporto della circonferenza al diametro, è prossimamente uguale a 3,141592.....

num. de' lati	perim. circoscr.	perim. iscritto
4	4,000000	2,828427
8	3,313707	3,061466
16	3,182597	3,121444
32	3,151723	3,136547
64	3,144118	3,140331
128	3,142223	3,141276
256	3,141750	3,141513
512	3,141631	3,141572
1024	3,141602	3,141586
2048	3,141594	3,141590
4096	3,141593	3,141591
8192	3,141592	3,141592

Digitized by Google

PROBLEMI RELATIVI AI DUE LIBRI PRECEDENTI.

1. *Da un punto A dato su di una retta BC si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima* (fig. 1).

Si prendano due punti B e C egualmente lontani dal punto dato A; coi centri B e C, e con un raggio maggiore di BA si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti D, dove tali circonferenze si tagliano, col punto dato A; sarà AD la perpendicolare dimandata.

Scolio. La stessa costruzione servirà a formare un angolo retto in un punto di una retta data.

---

2. *Dall' estremo A di una retta AB, si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima senza prolungarla* (fig. 2).

Da un punto qualunque C come centro, e col raggio CA, si descriva una circonferenza; pel punto B, dove la medesima incontra la AB, si conduca il diametro BD; si congiunga il punto D col punto dato A; sarà DA la perpendicolare dimandata.

---

3. *Da un punto A dato fuori di una retta BC, si vuole abbassare la perpendicolare alla medesima* (fig. 3).

Col centro A, e con un raggio arbitrario, si descriva una circonferenza, in modo che tagli la retta BC; dai punti d' intersezione B e C come centri, e con un raggio maggiore della metà di BC, si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti D, dove le medesime si tagliano, col punto dato A; sarà AD la perpendicolare dimandata.

---

4. *Si vuol dividere una retta finita BC in due parti uguali* (fig. 3).

Si descrivano due circonferenze che abbiano per centri rispettivi gli estremi B e C, e per raggio comune una retta maggiore della metà di BC; si congiungano fra loro i punti D, dove le dette circonferenze si tagliano; sarà il punto M, dove la DD incontra la BC, il punto medio della BC.

---

5. *Da un punto dato A si vuol condurre la parallela ad una retta data BC* (fig. 4).

Dal punto A si abbassi la perpendicolare AB sulla BC, e dallo stesso punto A s'innalzi la perpendicolare AD sulla AB; sarà AD la parallela dimandata.

---

6. *Da un punto A dato su di una retta AB se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima AB un angolo uguale ad un angolo dato C* (fig. 5).

Coi centri A e C, e con uno stesso raggio, si descrivano due archi BF e DE: si prenda l'arco BF uguale all'arco DE, e si congiunga il punto F col punto A; sarà FA la retta dimandata.

Scolio. Se l'angolo da costruirsi si volesse doppio, triplo, etc, oppure metà, terza parte etc, dell'angolo dato, bisognerà prendere l'arco BF doppio, triplo etc, oppure metà, terza parte etc. dell'arco DE.

---

7. *Da un punto A dato fuori di una retta BC se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima BC un angolo uguale ad un angolo dato FDG* (fig. 6).

Dal punto A si abbassi la perpendicolare AC sulla BC; dal punto D s'innalzi la perpendicolare DE sulla DF; al punto A della AC si formi l'angolo BAC uguale all'angolo EDG; sarà AB la retta dimandata.

---

8. *Dati due angoli A e B di un triangolo si vuole determinare il terzo* (fig. 7).

In un punto C di una retta GD si formi l'angolo ECD uguale ad A, e l'angolo FCG uguale a B; sarà l'angolo FCE l'angolo cercato.

Scolio. Per essere possibile il problema è necessario che la somma dei due angoli dati sia minore di due retti.

Scolio. Se i due angoli A e B fossero dati numericamente, il valore del terzo si otterrebbe sottraendo da 180° la somma dei due angoli dati A e B.

---

9. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo ed i lati che lo comprendono, rispettivamente uguali ad un angolo dato A ed a due rette pur date B e C* (fig. 8).

Si formi un angolo F uguale al dato A; si tagli FD uguale a B, ed FE uguale a C; si congiungano i punti D ed E; il triangolo DEF sarà il triangolo dimandato.

---

10. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un lato e gli angoli al medesimo adiacenti, uguali rispettivamente ad una retta data A, ed a due angoli pur dati B e C* (fig. 9).

Agli estremi D ed E, di una retta DE uguale ad A, si formino gli angoli FDE ed FED rispettivamente uguali ai dati B e C; sarà EDF il triangolo dimandato.

Scolio. Se la somma dei due angoli dati non è minore di due retti, il problema è impossibile.

Scolio. Se uno degli angoli proposti non è adiacente al lato dato, si determinerà prima il terzo angolo del triangolo, e poi si risolverà il problema come si è detto.

---

11. *Si vuol costruire un triangolo che abbia i tre lati rispettivamente uguali a tre rette date A, B, C* (fig. 10).

Si prenda una retta DE uguale ad A; col centro E e col raggio B si descriva una circonferenza; col centro D e col raggio C si descriva un' altra circonferenza; si congiunga

uno dei punti F, dove le descritte circonferenze si tagliano, coi punti D ed E; sarà FDE il triangolo dimandato.

Scolio. Se ciascuna delle rette date non è minore della somma delle altre due il problema è impossibile.

---

12. *Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo e due lati, l'uno adiacente e l'altro opposto al detto angolo, uguali rispettivamente ad un angolo dato A, ed a due rette pur date B e C* (fig. 11).

Si faccia un angolo D uguale al dato A; si tagli DE uguale a B; col centro E, e con un raggio uguale a C, si descriva una circonferenza la quale taglierà il lato DF in qualche punto F, si congiunga il punto F col punto E; sarà DEF il triangolo cercato.

Scolio. Se l'angolo dato è ottuso, o retto, il lato ad esso opposto dev'essere maggiore di quello adiacente. Se poi l'angolo dato è acuto il lato ad esso opposto potrà essere o maggiore o minore di quello adiacente; nel 1.° caso la descritta circonferenza taglierà il lato DF in un sol punto E, per es., e perciò vi sarà un solo triangolo DEF, che soddisfa alla condizione del problema; nel 2.° caso la circonferenza descritta taglierà il lato DF in due punti F e G, e perciò vi saranno due triangoli EDF ed EDG che soddisfano alle condizioni del problema.

Generalmente parlando il problema è impossibile quando il lato opposto all'angolo D è minore della perpendicolare EM abbassata dal punto E sul lato DF.

---

13. *Si vuol costruire un triangolo equilatero su di una retta data AB* (fig. 12).

Coi centri A e B, e con un raggio uguale ad AB, si descrivano due circonferenze; si congiunga uno dei punti C, dove le dette circonferenze si tagliano, coi punti A e B; sarà ABC il triangolo dimandato.

Digitized by Google

14. *Si vuol dividere un angolo dato ABC in due parti uguali* (fig. 13).

Col centro B, e con un raggio arbitrario BA, si descriva l'arco AMC; dal centro B si abbassi la perpendicolare BD sulla corda AC; sarà l'angolo ABC diviso in due parti uguali dalla retta BD.

Scolio. Questa stessa costruzione serve a dividere un arco dato AMC in due parti uguali.

Scolio. Ripetendo quel che si è fatto per l'angolo ABC, su ciascuno degli angoli parziali ABD e DBC, si verrà a dividere l'angolo proposto in quattro parti uguali; quindi potrà dividersi in 8, in 16, in 32, etc. parti uguali.

---

15. *Si vuol dividere un angolo retto in tre parti uguali* (fig. 14).

Su di una parte qualunque di uno dei lati dell'angolo si costruisca un triangolo equilatero ABC; sarà DAB la terza parte dell'angolo retto DAC.

Scolio. L'angolo retto è il solo che possa dividersi in tre parti uguali col mezzo della geometria.

---

16. *Si vuol trovare il centro di una circonferenza data ABD* (fig. 15).

Da un punto qualunque B, della circonferenza data, si conducano comunque due corde BA e BD, sulle quali s'innalzino dai loro punti medi E ed F le perpendicolari EC ed FC; sarà il punto C, dove le dette perpendicolari s'incontrano, il centro della circonferenza data.

---

17. *Per un punto A dato su di una circonferenza ABD si vuole condurre la tangente alla medesima* (fig. 16).

Si congiunga il punto dato A col centro C; dal punto A s'innalzi al raggio AC la perpendicolare AE; sarà AE la tangente dimandata.

Digitized by Google

Scolio. Per un punto dato sulla circonferenza non si può condurre che una sola tangente alla medesima.

---

18. *Per un punto A dato fuori di una circonferenza BFD, si vuole condurre una tangente alla medesima* (fig. 17).

Si congiunga il punto A col centro C; sulla AC come diametro si descriva una circonferenza; si congiunga uno dei punti F, dove le due circonferenze si tagliano, col punto dato A; sarà AF la tangente dimandata.

Scolio. Per un punto dato fuori di una circonferenza si possono condurre alla medesima due tangenti; delle quali le parti comprese tra il punto dato ed i punti di contatto sono uguali fra loro.

---

19. *Su di una retta data AB si vuol costruire un segmento di cerchio capace di contenere un angolo dato D* (fig. 18).

All' estremo B, della AB, si formi l'angolo ABE uguale al dato D; dal punto B s' innalzi sulla BE, la perpendicolare BC; sulla AB, e dal suo punto medio F, s' innalzi la perpendicolare FC, che incontrerà la BC in qualche punto C; col centro C e col raggio CB si descriva una circonferenza AGBL; sarà AGB il segmento dimandato.

Scolio. Se l' angolo proposto è retto, il problema si riduce a descrivere sulla retta data AB come diametro una semicirconferenza.

---

20. *Trovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date A,B,C* (fig. 19).

Su i lati di un angolo qualunque GEL si tagli EF uguale ad A, FG uguale a B, ed ED uguale a C; si congiunga il punto F col punto D, e si conduca GL parallela ad FD; sarà DL la quarta proporzionale dimandata.

Scolio. Se la ED si taglia pure uguale a B, sarà DL la terza proporzionale in ordine alle due rette A e B.

21. *Trovare la media proporzionale tra due rette date A e B* (fig. 20).

Su di una retta indefinita CE si tagli CD uguale ad A, e DE uguale a B; sulla CE, come diametro, si descriva una semicirconferenza; dal punto D s' innalzi sulla CE la perpendicolare DF; sarà DF la media proporzionale dimandata.

---

22. *Si vuol trovare il rapporto numerico di due rette date A e B, o di due angoli dati.*

Si porti la retta minore B sulla maggiore A tante volte per quanto si può; indi il resto di tale operazione, che indicheremo con C, si porti sulla retta B tante volte per quanto si può; indi il resto di questa seconda operazione, che indicheremo con D, si porti sulla retta C tante volte per quanto si può; e così si proseguirà finchè una di tali operazioni non lasci resto; in tal caso l'ultimo resto sarà la comune misura delle due rette proposte, delle quali sarà facile esprimerne numericamente il rapporto, prendendo per unità la comune misura cennata. Infatti supponendo che B sia contenuta 2 volte in A; che C sia contenuta 1 volta in B; e che D sia contenuta 3 volte esattamente in C, si avrà, prendendo la retta D come unità, che la retta C sarà uguale a 3; la retta B sarà uguale a 4; e la retta A sarà uguale ad 11; onde si avrà

$$A : B :: 11 : 4.$$

Se invece di due rette fossero proposti due angoli, si troverebbe il loro rapporto numerico operando sugli archi che li misurano allo stesso modo che si è detto per le rette.

Scolio. Nello applicare questo metodo, che è solo esatto in teoria, se non si perviene ad ottenere mai un quoziente esatto, le due rette o i due angoli proposti non hanno nessuna misura comune, e si dicono perciò incommensurabili.

---

23. *Si vuol trovare il rapporto della diagonale AC al lato AB del quadrato* (fig. 21).

Essendo il triangolo ABC rettangolo ed isoscele si avrà

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2,$$

donde

$$\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1,$$

e quindi

$$AC : AB :: \sqrt{2} : 1;$$

ma $\sqrt{2}$ è incommensurabile coll'unità, dunque pure la diagonale AC è incommensurabile col lato AB del quadrato.

Scolio. Il rapporto della diagonale al lato del quadrato quantunque non possa ottenersi esattamente, pure, avendosi dalla proporzione precedente

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

potrà approssimarsi al vero quanto più piace, estraendo la radice di 2 con quante cifre decimali si vogliono.

---

24. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per due punti dati A e B, e sia tangente ad una retta data DE* (fig. 22).

Si congiungano i due punti dati A e B; si prolunghi la AB sino ad incontrare la DE in qualche punto D; si trovi la media proporzionale tra le rette DA e DB, e sia DE; dal punto E s'innalzi EC perpendicolare a DE; dal punto F medio di AB s'innalzi sulla medesima la perpendicolare FC; sarà il punto C, dove queste perpendicolari s'incontrano, il centro della circonferenza dimandata, il raggio della quale sarà proprio la retta CE.

Scolio. Se la retta data LG fosse parallela alla retta che congiunge i punti dati A e B, il punto di contatto sarebbe proprio il punto G dove la perpendicolare FG incontra la LG, onde congiunto il punto G con uno dei punti dati A, ed innalzata sulla AG e dal suo punto medio M la perpendicolare MC, si avrebbe nell'intersezione C di questa perpendicolare colla FG il centro dimandato.

---

25. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per un punto dato A, e sia tangente a due rette date BD* e *BE* (fig. 23).

Dei quattro angoli che formano le rette proposte si divida per metà, colla retta BF, quello che contiene il punto dato A; dal punto A si abbassi AF perpendicolare a BF, e si tagli FG uguale ad AF; sarà G un secondo punto della circonferenza dimandata; la quale si descriverà, come nel precedente problema, in modo che passi pei punti A e G, e tocchi una delle rette date BD o BE.

Scolio. Se le due rette proposte LM ed NP fossero parallele, si condurrebbe prima alle rette date una parallela BF da loro equidistante, e si proseguirebbe quindi come si è detto.

---

26. *Si vuol descrivere una circonferenza in modo che tocchi tre rette AB, AD, BD che s' intersecano* (fig. 24).

Si conduca la retta AC in modo che divida per metà l'angolo BAD; si conduca la BC in modo che divida per metà l'angolo ABD; dal punto C dove le rette AC e BC si tagliano, si abbassi la perpendicolare CE su di una delle rette date; sarà C il centro, e CE il raggio della circonferenza dimandata.

Scolio. Le rette che dividono per metà i tre angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto, che è proprio il centro del cerchio iscritto in detto triangolo.

Scolio. Questo problema è suscettibile di diverse soluzioni; noi però abbiamo dato solo quella per la quale si à la circonferenza iscritta nel triangolo che colla loro scambievole intersezione formano le tre rette date.

---

27. *Si vuol dividere una retta data AB in parti proporzionali a delle rette date M, N, P* (fig. 25).

Da un estremo A della retta AB si conduca, sotto un angolo qualunque, la retta AE, sulla quale, a partire dal punto A, si taglino le parti AC, CD, DE uguali alle rette date M, N, P; si congiunga il punto E col punto B, e dai punti C e D si conducano le rette CF, DG parallele ad EB; saranno le parti AF, FG, GB, della retta AB, rispettivamente proporzionali alle rette date M, N, P.

Scolio. Le rette AC, CD, DE si taglierebbero uguali fra loro se la AB volesse dividersi in parti uguali.

---

28. *Si vuol dividere una retta AB in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l' intera retta e la minore* (fig. 26).

Dall' estremo B s' innalzi sulla AB la perpendicolare BC; si tagli BC uguale alla metà di AB; si descriva col centro C e col raggio CB la circonferenza BDE; si conduca pel punto A e pel centro C la secante AD, e si tagli AF uguale ad AE. Essendo AB una tangente ed AD una secante, si avrà

$$AD : AB :: AB : AE$$

donde dividendo ed invertendo si à in fine

$$AB : AF :: AF : FB;$$

dunque la AB è divisa nel punto F nel modo dimandato.

Scolio. Questo modo di dividere una retta s' indica pure dicendo — dividere una retta in estrema e media ragione.

---

29. *Per un punto A dato dentro di un angolo BCD, si vuol condurre una retta in modo che le parti intercette tra il punto dato ed i lati dell' angolo stiano fra loro nella ragione di M ad N* (fig. 27).

Dal punto A si conduca AE parallela al lato CB, sul quale si taglino le rette CF ed FB in modo che stiano fra loro nella data ragione di M ad N; si congiunga il punto F col punto E; si conduca BD parallela ad FE, e pei punti D ed A si conduca la retta DAG, che sarà la retta dimandata.

Scolio. Se le due parti AD ed AG si volessero uguali fra loro, si otterrebbe la retta DG tagliando solamente ED uguale ad EC, e congiungendo il punto D col punto dato A.

---

30. *Su di una retta data AB, come lato, si vuol costruire un quadrato* (fig. 28).

All' estremo A della retta AB si formi l' angolo retto DAB; col centro A e col raggio AB si descriva il quadrante BED; coi centri B e D, e collo stesso raggio AB, si descrivano due archi AFC ed AEC; si congiunga il punto C, dove questi archi si tagliano, coi punti B e D; sarà ABCD il quadrato dimandato.

---

31. *Si vuol costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo dato.*

Si trovi la media proporzionale X tra la base B e l' altezza A del parallelogrammo dato; sarà X il lato del quadrato cercato.

Scolio. Una costruzione simile servirebbe a trovare il lato del quadrato equivalente ad un triangolo, o ad un trapezio dato.

---

32. *Si vuol cambiare un poligono dato ABCDE in un altro equivalente che abbia un lato di meno* (fig. 29).

Per un vertice E si conduca la parallela EF alla diagonale DA; si prolunghi la BA sino ad incontrare la EF, e si conduca la DF. I due triangoli AED ed AFD sono equivalenti, perchè hanno la stessa base e la stessa altezza, dunque il pentagono dato ABCDE è equivalente al quadrilatero CBFD.

Scolio. Questa costruzione essendo indipendente dal numero dei lati del poligono dato, mostra che ogni poligono può cambiarsi in un triangolo equivalente, e quindi in un quadrato equivalente.

---

33. *Su di una retta data AB, come base, si vuol costruire un parallelogrammo che abbia uno degli angoli alla base uguale ad un angolo dato C, e sia equivalente ad un parallelogrammo dato* (fig. 30).

All'estremo A della AB si formi l'angolo BAD uguale al dato C, sulla AE, perpendicolare ad AB, si tagli AE uguale alla quarta proporzionale X in ordine alla retta data AB, alla base, ed all'altezza del parallelogrammo dato, e si conducano le rette EF e BF rispettivamente parallele ad AB ed AD; sarà ABFD il parallelogrammo dimandato.

Scolio. Una costruzione simile si farebbe se il parallelogrammo dato si volesse equivalente ad un triangolo, o ad un trapezio dato.

---

34. *Si vuol costruire un quadrato equivalente alla somma, o alla differenza di due quadrati dati M^2 ed N^2* (fig. 31).

Si conducano due rette BA e DC fra loro perpendicolari.

1.° Si tagli AB uguale ad M, AC uguale ad N, e si congiungano i punti B e C; sarà BC il lato del quadrato equivalente alla somma dei quadrati dati.

2.° Si tagli AB uguale al lato minore M; col centro B, e con un raggio BD uguale ad N, si descriva una circonferenza, che taglierà la AD in un punto D; sarà AD il lato del quadrato equivalente alla differenza dei quadrati dati.

Scolio. Se nel primo caso i quadrati dati fossero più di due, il problema si risolverebbe ripetendo più volte la costruzione eseguita pel caso di due quadrati.

---

35. *Si vuol costruire un rettangolo in modo che sia equivalente ad un quadrato dato M^2, e che abbia per somma, o per differenza della sua base e della sua altezza una retta data AB* (fig. 32 e 33).

1.° *Caso.* Sulla retta data AB come diametro si descriva una semicirconferenza; sulla AC, perpendicolare ad AB, si tagli AC uguale al lato M del quadrato dato; si conduca CD parallela ad AB, e si abbassi da uno dei punti D, dove tale parallela taglia la semicirconferenza, la perpendicolare DE sulla AB; saranno AE ed EB la base e l'altezza del rettangolo cercato.

2.° *Caso.* Sulla AB come diametro si descriva una circonferenza; sulla AC, perpendicolare ad AB, si tagli AC uguale al lato M del quadrato, e si conduca pel punto C e pel centro O la secante CE; saranno CE e CD la base e l'altezza del rettangolo dimandato.

Scolio. Nel 1° caso il problema è impossibile quando il lato del quadrato dato è maggiore della metà della retta data AB.

---

36. *Si vuol costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato Q^2 nella ragione di M ad N* (fig. 34).

Su di una retta indefinita AC si taglino le due parti AB e BC in modo che stiano fra loro nella ragione data di M ad N; sulla AC come diametro si descriva una semicirconferenza; dal punto B s'innalzi BD perpendicolare ad AC; si congiunga il punto D coi punti A e C; sulla DC si tagli DE uguale al lato Q del quadrato dato, e si conduca EF parallela ad AC; sarà DF il lato del quadrato cercato.

---

37. *Dato un poligono ABCD ed una retta EF si vuole su questa retta, come lato omologo ad uno dei lati AB, del poligono dato, costruire un poligono simile al dato* (fig.35).

Nel poligono dato si conduca la diagonale AC; ai punti E ed F della EF si formino gli angoli FEG ed EFG rispettivamente uguali agli angoli BAC ed ABC; ai punti E e G della EG si formino gli angoli LEG ed LGE uguali rispettivamente a DAC e DCA; sarà EFGL il poligono dimandato.

---

38. *Dati due poligoni simili, se ne vuol costruire un terzo simile alli medesimi ed equivalente alla loro somma o alla loro differenza* (fig. 31).

1.° *Caso.* Si costruisca un triangolo rettangolo ABC che abbia i suoi cateti AB ed AC uguali a due lati omologhi dei due poligoni dati; sarà l'ipotenusa BC di tal triangolo, il lato omologo ai due suddetti, nel poligono cercato.

2.° *Caso.* Si costruisca un triangolo rettangolo ABD che abbia l'ipotenusa BD ed un cateto AB rispettivamente uguali a due lati omologhi dei due poligoni dati; sarà l'altro cateto DA il lato omologo ai due suddetti nel poligono cercato.

Scolio. In questo 2.° caso si prenderà per ipotenusa il maggiore dei due lati omologhi che si considerano nei poligoni dati.

---

39. *Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato ABCD e che stia al medesimo nella ragione di M ad N* (fig. 35).

Si trovi il lato EF del quadrato che sta al quadrato di un lato qualunque AB del poligono dato, nella ragione di M ad N, sulla retta EF, come lato omologo ad AB, si costruisca un poligono EFGL simile ad ABCD; sarà EFGL il poligono cercato.

---

40. *Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato P, ed equivalente ad un altro poligono dato Q* (fig. 36).

Si trovi il lato M del quadrato equivalente al poligono P; si trovi il lato N del quadrato equivalente al poligono Q; in ordine alle rette M, N ed uno dei lati AB del poligono P, si trovi la quarta proporzionale X; sulla retta X, come lato omologo ad AB si costruisca un poligono Y simile a P; sarà Y il poligono cercato.

---

41. *Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due poligoni simili dati, dei quali M ed N sono due lati omologhi* (fig. 37).

Si costruisca un triangolo rettangolo ABC che abbia i suoi cateti BA e BC uguali alle rette M ed N; sull'ipotenusa AC di tale triangolo si abbassi dal vertice B la perpendicolare BD; saranno AD e DC le rette dimandate.

---

42. *Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due rettangoli dati di cui* A *ed* a *sono le altezze,* B *e* b *le basi.*

Si trovi la quarta proporzionale X in ordine alle rette A, a, b, cioè sia

$$A : a :: b : X;$$

donde

$$A.X = a.b.$$

Si stabilisca la proporzione identica

$$A.B : a.b :: A.B : a.b,$$

nella quale posto in vece del prodotto $a.b$, che è nel secondo rapporto, il prodotto uguale A.X, si avrà

$$A.B : a.b :: A.B : A.X$$

donde

$$A.B : a.b :: B : X;$$

dunque B ed X sono le rette dimandate.

---

43. *Si vuol costruire un cerchio la cui circonferenza, o la cui superficie, stia alla circonferenza o alla superficie di un cerchio dato nella ragione di M ad N.*

1.° *Caso.* Si trovi una retta X che stia al raggio R, del cerchio dato, come M sta ad N; sarà X il raggio del cerchio la cui circonferenza sta alla data nella ragione di M ad N.

2.° *Caso.* Si trovi il lato X del quadrato che sta al quadrato del raggio R, del cerchio dato, nella ragione di M ad N; sarà X il raggio del cerchio la cui superficie sta a quella del cerchio dato nella ragione di M ad N.

---

44. *Si vuole iscrivere un quadrato in un cerchio* (fig. 38).

Si conducano due diametri AD e BE l'uno perpendicolare all'altro; e si congiungano fra loro gli estremi di questi diametri colle corde AB, BD, DE, EA; sarà ABDE il quadrato cercato.

Scolio. Per mezzo del quadrato iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolari di 8, 16, 32, 64 lati etc.

---

45. *Si vuole iscrivere un esagono regolare in un cerchio* (fig. 39).

Si adatti la corda AB uguale al raggio, e si congiunga il centro C coi punti A e B. Nel triangolo equilatero ACB,

essendo l'angolo C terza parte di due angoli retti, ovvero sesta parte di quattro, sarà l'arco AB sesta parte della circonferenza; perciò la corda AB, che è uguale al raggio, sarà il lato dell'esagono regolare iscritto.

Coroll. Congiungendo alternativamente fra loro i vertici dell'esagono, si avrà il triangolo equilatero iscritto ADE.

Scolio. Per mezzo dell'esagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolari di 12, 24, 48 lati etc.

---

46. *Si vuole iscrivere un decagono regolare in un cerchio* (fig. 40).

Si divida il raggio AC in estrema e media ragione. Si adatti la corda AD uguale alla parte maggiore CB, e si congiunga il punto D coi punti C e B. A cagione della proporzione

AC : AD :: AD : AB,

che si à per costruzione, i due triangoli CAD e BAD sono simili, perchè hanno un angolo A comune compreso fra lati AC ed AD rispettivamente proporzionali ai lati AD ed AB; ma il primo di questi triangoli è isoscele, dunque pure il secondo BAD è isoscele, e perciò DB è uguale a DA; ma BC è pure uguale a DA, dunque BC è uguale a BD, e per conseguenza l'angolo C è uguale all'altro BDC; ma l'angolo C è pure uguale ad ADB, perchè angoli al vertice di due triangoli isosceli simili, dunque nel triangolo ACD l'angolo C è metà tanto dell'angolo CDA quanto del suo uguale CAD; onde segue che l'angolo C è quinta parte di due retti, ovvero decima parte di quattro, e perciò l'arco AD essendo decima parte della circonferenza, la sua corda AD sarà il lato del decagono regolare iscritto.

Coroll. Congiungendo alternativamente fra loro i vertici del decagono regolare iscritto si avrà il pentagono regolare iscritto.

Scolio. Per mezzo del decagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi al cerchio i poligoni regolare di 20, 40, 80 lati etc.

---

47. *Si vuole iscrivere un pentadecagono regolare in un cerchio* (fig. 40).

Si adatti la corda EG uguale al lato dell'esagono regolare iscritto, e la corda EF uguale al lato del decagono regolare pure iscritto. L'arco FG essendo differenza dei due archi EG ed EF, sarà uguale ad un sesto meno un decimo, ovvero ad un quindicesimo della circonferenza, e perciò la sua corda sarà il lato del pentadecagono regolare iscritto.

Scolio. Per mezzo del pentadecagono regolare iscritto potranno iscriversi e circoscriversi pure i poligoni regolari di 30, 60, 120, 240 lati etc.

FINE.

008050

INDICE

§ 1 a 18 *Definizioni e Nozioni preliminari.*
» 19 a 25 *Spiegazione di alcuni vocaboli usati in Geometria.*
» 26 » *Assiomi.*

LIBRO I.

CAPITOLO I.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI, E DELLE OBLIQUE.

§ 27. *Teor.* Da un punto dato su di una retta non si può innalzare alla medesima che una sola perpendicolare.

» 28. *Teor.* Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

» 29. *Teor.* Da un punto dato fuori di una retta non si può abbassare sulla medesima che una sola perpendicolare.

» 30. *Teor.* Due angoli adiacenti che hanno i lati esterni in linea retta sono l'uno supplemento dell'altro.

» 31. *Teor.* Due angoli adiacenti che sono l'uno supplemento dell'altro hanno i lati esterni in linea retta.

» 32. *Teor.* Quando due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.

» 33. *Teor.* Se dal punto medio di una retta s'innalzi la perpendicolare sulla medesima, ogni punto della perpendicolare sarà egualmente distante dagli estremi della retta; ed ogni punto fuori la perpendicolare sarà disugualmente distante da tali estremi.

» 34. *Teor.* Se da un punto dato fuori di una retta si abbassino sulla medesima la perpendicolare ed un'obliqua, sarà la perpendicolare più corta dell'obliqua.

» 35. *Teor.* Se da un punto dato fuori di una retta si abbassino sulla medesima due oblique egualmente lontane dal piede della perpendicolare, saranno tali oblique uguali fra loro.

» 36. *Teor.* Se da un punto dato fuori di una retta si abbassino sulla medesima due oblique disugualmente lontane dal piede della perpendicolare, sarà di tali oblique minore quella che è più vicina alla perpendicolare.

» 37. *Teor.* Se da un punto dato fuori di una retta si abbassino sulla medesima due oblique eguali, saranno tali oblique egualmente lontane dal piede della perpendicolare.

Digitized by Google

§ 38. *Teor.* Se da un punto dato fuori di una retta si abbassino sulla medesima due oblique disuguali sarà la minore più vicina alla perpendicolare.

» 39. *Teor.* Due oblique che partono dallo stesso punto, fanno colla retta sulla quale sono condotte disuguali gli angoli che rivolgono la loro apertura dalla stessa parte.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PARALLELE.

» 40 a 41. *Definizioni.*

» 42. Con quali nomi s'indicano gli angoli formati da due rette parallele che vengono intersecate da una terza retta.

» 43. *Teor.* Per un punto dato fuori di una retta non si può condurre alla medesima che una sola parallela.

» 44. *Teor.* Due rette che vengono intersecate da una terza sono parallele quando due angoli corrispondenti sono uguali fra loro.

» 45. *Teor.* Due rette che vengono intersecate da una terza sono parallele quando due angoli alterni interni sono uguali fra loro.

» 46. *Teor.* Due rette che vengono intersecate da una terza sono parallele quando due angoli interni dalla stessa parte sono l'uno supplemento dell'altro.

» 47. *Teor.* Quando due rette parallele vengono intersecate da una terza gli angoli corrispondenti sono uguali fra loro.

» 48. *Teor.* Quando due rette parallele vengono intersecate da una terza gli angoli alterni interni sono uguali fra loro.

» 49. *Teor.* Quando due rette parallele vengono intersecate da una terza gli angoli interni dalla stessa parte sono l'uno supplemento dell'altro.

» 50. *Teor.* Due rette, che vengono intersecate da una terza s'incontrano quando gli angoli interni dalla stessa parte non sono l'uno supplemento dell'altro.

» 51. *Teor.* Due angoli che hanno i lati paralleli e diretti nello stesso senso, o in senso contrario, sono uguali fra loro.

» 52. *Teor.* Due rette parallele comprese fra due altre rette parallele sono uguali fra loro.

» 53. *Teor.* Se due rette s'incontrano, le perpendicolari innalzate sulle medesime, devono pure incontrarsi.

Digitized by Google

CAPITOLO III.

DEI TRIANGOLI.

§ 54 e 55. *Definizioni.*

» 56. *Teor.* In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due, ed è maggiore della loro differenza.

» 57. *Teor.* In ogni triangolo a lati uguali si oppongono angoli uguali.

» 58. *Teor.* In ogni triangolo a lati disuguali si oppongono angoli disuguali; e propriamente al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore.

» 59. *Teor.* In ogni triangolo ad angoli eguali, si oppongono lati eguali.

» 60 *Teor.* In ogni triangolo ad angoli disuguali si oppongono lati disuguali; e propriamente all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore.

» 61. *Teor.* In ogni triangolo la somma degli angoli è uguale a due angoli retti.

» 62. *Teor.* In ogni triangolo l'angolo esterno, che si ha prolungando un lato, è uguale alla somma dei due interni ed opposti.

» 63. *Teor.* Due triangoli sono uguali quando hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adiacenti al primo, rispettivamente uguali agli angoli adiacenti al secondo.

» 64. *Teor.* Due triangoli sono uguali quando hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, e l'angolo compreso tra i primi, uguale all'angolo compreso tra i secondi.

» 65. *Teor.* Due triangoli sono uguali quando hanno i tre lati rispettivamente uguali ai tre lati.

» 66. *Teor.* Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa uguale all'ipotenusa, ed un cateto uguale ad un cateto.

» 67. *Teor.* Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati, e l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dai secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo triangolo.

CAPITOLO IV.

DEI QUADRILATERI.

» 68. a 73. *Definizioni.*

» 74. *Teor.* In ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, come pure gli angoli opposti.

» 75. *Teor.* Un quadrilatero che à i lati opposti uguali è un parallelogrammo.

§ 76. *Teor.* Un quadrilatero che à due lati opposti uguali e paralleli, avrà pure gli altri due uguali e paralleli, e sarà un parallelogrammo.

» 77. *Teor.* In ogni parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente in parti uguali.

» 78. *Teor.* In ogni trapezio la retta che unisce i punti medi dei lati non paralleli, è parallela agli altri due lati, ed è uguale alla metà della loro somma.

» 79. *Teor.* In ogni poligono convesso la somma degli angoli interni è uguale a tante volte due angoli retti per quanti sono i lati meno due.

CAPITOLO V.

DEL CERCHIO E DELLA CIRCONFERENZA.

» 80. a 92. *Definizioni.*

» 93. *Teor.* Una retta non può intersecare una circonferenza in più di due punti.

» 94. *Teor.* Ogni diametro divide la circonferenza ed il cerchio in due parti uguali.

» 95. *Teor.* La retta perpendicolare all' estremo di un diametro è tangente al cerchio.

» 96. *Teor.* Il diametro che passa pel punto di contatto è perpendicolare alla tangente.

» 97. *Teor.* Il diametro perpendicolare ad una corda divide la corda e l' arco sotteso in due parti uguali.

» 98. *Teor.* Due rette parallele intercettano sulla circonferenza archi uguali.

» 99. *Teor.* Ogni angolo iscritto è metà dell' angolo al centro che comprende fra i suoi lati lo stesso arco del primo.

» 100. *Teor.* Nello stesso cerchio o in cerchi uguali se due angoli al centro sono uguali, gli archi intercetti saranno pure uguali; e reciprocamente.

» 101. *Teor.* Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, di due angoli al centro il maggiore intercetta l' arco maggiore; e reciprocamente.

» 102. *Teor.* Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due angoli al centro stanno fra loro come gli archi intercetti.

» 103. *Teor.* Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, corde uguali sottendono archi uguali; e reciprocamente.

» 104. *Teor.* Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde la maggiore sottende l' arco maggiore; e reciprocamente.

§ 105. *Teor.* Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, due corde uguali distano ugualmente dal centro; e reciprocamente.

» 106. *Teor.* Nello stesso cerchio, o in cerchi uguali, di due corde la maggiore è più vicina al centro; e reciprocamente.

» 107. *Teor.* Per tre punti non posti in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza di cerchio.

» 108. *Teor.* Se due circonferenze hanno un punto comune, posto fuori la retta dei centri, necessariamente ne avranno un altro, e perciò si taglieranno.

» 109. *Teor.* Se due circonferenze si tagliano la distanza dei centri è minore della somma dei raggi; ed è maggiore della loro differenza.

» 110. *Teor.* Se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi, ed è maggiore della loro differenza le due circonferenze si taglieranno.

CAPITOLO VI.

MISURA DEI TRIANGOLI E DEI QUADRILATERI.

» 111. a 115. *Definizioni.*

» 116. *Teor.* Due rettangoli che hanno le basi uguali, e le altezze uguali, sono uguali.

» 117. *Teor.* Due rettangoli che hanno la stessa altezza, stanno fra loro come le basi.

» 118. *Teor.* Due rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

» 119. *Teor.* Ogni parallelogrammo è equivalente al rettangolo che à la stessa base e la stessa altezza.

» 120. *Teor.* Ogni triangolo è metà del rettangolo che à la stessa base e la stessa altezza.

» 121. *Teor.* Ogni trapezio è la somma di due triangoli che hanno per altezza e per basi, l'altezza e le basi del trapezio.

CAPITOLO VII.

MISURA DEGLI ANGOLI.

» 122. *Nozioni preliminari.*

» 123. *Teor.* Ogni angolo iscritto à per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

» 124. *Teor.* L'angolo formato da una tangente e da una corda à per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

» 125. *Teor.* Un'angolo, che à il vertice dentro o fuori la circonferenza, à per misura la metà della somma, o della differenza degli archi intercetti tra i suoi lati.

LIBRO II.

CAPITOLO I.

DELLE RETTE PROPORZIONALI, E DELLE FIGURE SIMILI.

§ 126. e 127. *Definizioni.*

» 128. *Teor.* In ogni triangolo la retta parallela ad un lato, divide gli altri due in parti proporzionali.

» 129. *Teor.* La retta che divide in parti proporzionali due lati di un triangolo, è parallela al terzo.

» 130. *Teor.* In ogni triangolo la retta che divide per metà un angolo, divide il lato opposto in due parti proporzionali ai lati di detto angolo.

» 131. *Teor.* Due triangoli equiangoli sono simili.

» 132. *Teor.* Due triangoli che hanno i lati rispettivamente proporzionali sono simili.

» 133. *Teor.* Due triangoli che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali sono simili.

» 134. *Teor.* Due triangoli che hanno i lati rispettivamente paralleli sono simili.

» 135. *Teor.* Due triangoli che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono simili.

» 136. *Teor.* Due poligoni, che sono composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente posti, sono simili fra loro.

» 137. *Teor.* Due poligoni simili, sono composti dello stesso numero di triangoli simili, e similmente posti.

» 138. *Teor.* Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

» 139. *Teor.* Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

» 140. *Teor.* I perimetri dei poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi.

CAPITOLO II.

PROPRIETÀ RELATIVE DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI FATTI SU TALUNE RETTE.

» 141. *Teor.* Il quadrato di una retta, che è somma di due altre, è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, più due volte il rettangolo delle medesime.

» 142. *Teor.* Il quadrato di una retta che è differenza di due altre, è uguale alla somma dei quadrati di queste due rette, meno due volte il rettangolo delle medesime.

Digitized by Google

§ 143. *Teor.* In ogni triangolo rettangolo il quadrato della ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.

» 144. *Teor.* In ogni triangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che sul medesimo à l'altro lato.

» 145. *Teor.* In ogni triangolo il quadrato del lato opposto all'angolo acuto, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il rettangolo di uno di questi per la projezione che sul medesimo à l'altro lato.

» 146. *Teor.* Se da un punto preso dentro di un cerchio si conducono due corde, il rettangolo delle parti dell'una è equivalente al rettangolo delle parti dell'altra.

» 147. *Teor.* Se da un punto preso fuori di un cerchio, si conducono due secanti terminate alla parte concava, il rettangolo di una di queste nella sua parte esterna, è equivalente al rettangolo dell'altra pure nella sua parte esterna.

» 148. *Teor.* Se da un punto preso fuori di un cerchio, si conduca una tangente, ed una secante terminata alla parte concava, il quadrato della tangente è equivalente al rettangolo della secante nella sua parte esterna.

CAPITOLO III.

DEI POLIGONI REGOLARI.

» 149 a 151. *Definizioni.*

» 152. *Teor.* Ad ogni poligono regolare può essere circoscritta o iscritta una circonferenza.

» 153 *Teor.* Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili.

» 154. *Teor.* I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati, stanno come i raggi dei cerchi iscritti, o circoscritti; e le superficie come i quadrati dei medesimi raggi.

» 155. *Teor* L'aja di un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.

» 156. *Teor.* Se si congiungono i vertici di un poligono regolare col centro, e si uniscono fra loro i punti dove queste rette tagliano la circonferenza iscritta, si avrà un poligono regolare iscritto nella medesima, e simile al dato.

» 157. *Teor.* Se si congiungono i vertici di un poligono regolare iscritto coi punti medj degli archi sottesi dai suoi lati, si avrà un poligono regolare iscritto di un doppio numero di lati del dato.

Digitized by Google

CAPITOLO IV.

DELL' AJA DEL CERCHIO E DEL RAPPORTO DELLA CIRCONFERENZA AL DIAMETRO.

§ 158. *Definizione.*

» 159. *Teor.* L'aja del cerchio è uguale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio.

» 160. *Teor.* L'aja di un settore è uguale al suo arco moltiplicato per la metà del raggio.

» 161. *Teor.* Le circonferenze dei cerchi stanno fra loro come i raggi, e le aje come i quadrati dei raggi.

» 162. *Teor.* Gli archi simili stanno fra loro come i raggi, ed i settori simili come i quadrati dei raggi.

» 163. *Prob.* Dati i lati di due poligoni regolari simili di n lati l'uno iscritto e l'altro circoscritto, si vuole il perimetro del poligono tanto iscritto che circoscritto di $2n$ lati.

» 164. *Prob.* Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE LIBRI PRECEDENTI.

» 1. Da un punto dato su di una retta si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima.

» 2. Dall'estremo di una retta si vuole innalzare la perpendicolare alla medesima senza prolungarla.

» 3. Da un punto dato fuori d'una retta si vuole abbassare la perpendicolare alla medesima.

» 4. Si vuol dividere una retta finita in due parti uguali.

» 5. Da un punto dato si vuol condurre la parallela ad una retta data.

» 6. Da un punto dato su di una retta se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima un angolo uguale ed un angolo dato.

» 7. Da un punto dato fuori di una retta se ne vuole condurre un'altra che formi colla prima un angolo uguale ad un angolo dato.

» 8. Dati due angoli di un triangolo si vuole determinare il terzo.

» 9. Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo ed i lati che lo comprendono, rispettivamente uguali ad un angolo dato ed a due rette pur date.

§ 10. Si vuol costruire un triangolo che abbia un lato e gli angoli al medesimo adiacenti, uguali rispettivamente ad una retta data ed a due angoli pur dati.

» 11. Si vuol costruire un triangolo che abbia i tre lati rispettivamente uguali a tre rette date.

» 12. Si vuol costruire un triangolo che abbia un angolo e due lati, l'uno adiacente e l'altro opposto al detto angolo, uguali rispettivamente ad un angolo dato ed a due rette pur date.

» 13. Si vuol costruire un triangolo equilatero su di una retta data.

» 14. Si vuol dividere un angolo dato in due parti uguali.

» 15. Si vuol dividere un angolo retto in tre parti uguali.

» 16. Si vuol trovare il centro di una circonferenza data.

» 17. Per un punto dato su di una circonferenza si vuole condurre la tangente alla medesima.

» 18. Per un punto dato fuori di una circonferenza si vuole condurre una tangente alla medesima.

» 19. Su di una retta data si vuol costruire un segmento di cerchio capace di contenere un angolo dato.

» 20. Trovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date.

» 21. Trovare la media proporzionale tra due rette date.

» 22. Si vuol trovare il rapporto numerico di due rette date, o di due angoli dati.

» 23. Si vuol trovare il rapporto della diagonale al lato del quadrato.

» 24. Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per due punti dati, e sia tangente ad una retta data.

» 25. Si vuol descrivere una circonferenza in modo che passi per un punto dato, e sia tangente a due rette date.

» 26. Si vuol descrivere una circonferenza in modo che tocchi tre rette che s'intersecano.

» 27. Si vuol dividere una retta data in parti proporzionali a delle rette date.

» 28. Si vuol dividere una retta in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l'intera retta e la minore.

» 29. Per un punto dato dentro di un angolo, si vuol condurre una retta in modo che le parti intercette tra il punto dato ed i lati dell'angolo stiano fra loro nella ragione di *M* ad *N*.

» 30. Su di una retta data, come lato, si vuol costruire un quadrato.

» 31. Si vuol costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo dato.

» 32. Si vuol cambiare un poligono dato in un altro equivalente che abbia un lato di meno.

§ 33. Su di una retta data, come base, si vuol costruire un parallelogrammo che abbia uno degli angoli alla base uguale ad un angolo dato, e sia equivalente ad un parallelogrammo dato.

» 34. Si vuol costruire un quadrato equivalente alla somma, o alla differenza di due quadrati dati.

» 35. Si vuol costruire un rettangolo in modo che sia equivalente ad un quadrato dato, e che abbia per somma, o per differenza della sua base e della sua altezza una retta data.

» 36. Si vuol costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato nella ragione di *M* ad *N*.

» 37. Dato un poligono ed una retta si vuole su questa retta, come lato omologo ad uno dei lati del poligono dato, costruire un poligono simile al dato.

» 38. Dati due poligoni simili, se ne vuol costruire un terzo simile ai medesimi ed equivalente alla loro somma o alla loro differenza.

» 39. Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato e che stia al medesimo nella ragione di *M* ad *N*.

» 40. Si vuol costruire un poligono simile ad un poligono dato, ed equivalente ad un altro poligono dato.

» 41. Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due poligoni simili dati, dei quali *M* ed *N* sono due lati omologhi.

» 42. Trovare due rette che abbiano fra loro lo stesso rapporto di due rettangoli dati di cui *A* ed *a* sono le altezze, *B* e *b* le basi.

» 43. Si vuol costruire un cerchio la cui circonferenza, o la cui superficie, stia alla circonferenza o alla superficie di un cerchio dato nella ragione di *M* ad *N*.

» 44. Si vuole iscrivere un quadrato in un cerchio.

» 45. Si vuole iscrivere un esagono regolare in un cerchio.

» 46. Si vuole iscrivere un decagono regolare in un cerchio.

» 47. Si vuole iscrivere un pentadecagono regolare in un cerchio.

SBN 608050

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig: 4.ª

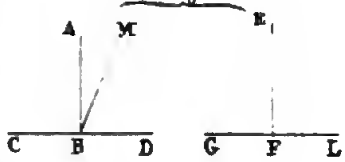


Fig: 9.ª

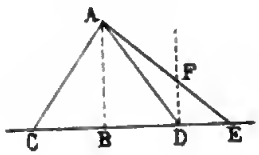


Fig: 12.ª

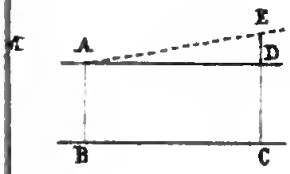


Fig: 17.ª

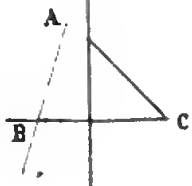


Fig: 18.ª

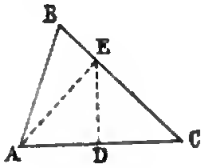


Fig: 21.ª

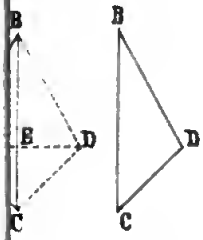
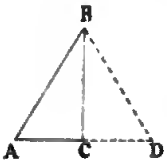


Fig. 22.ª



g. 26.ª

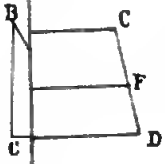


Fig. 27.ª

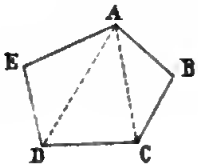


Fig. 31.ª

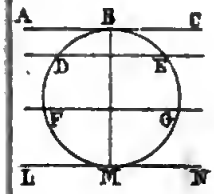


Fig. 32.ª

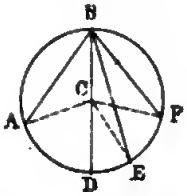


Fig: 35.ª

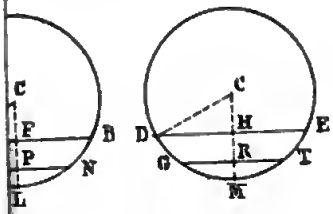


Fig. 39.ª

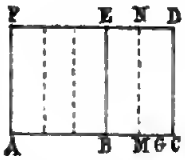


Fig. 40.ª

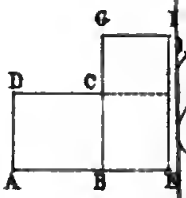
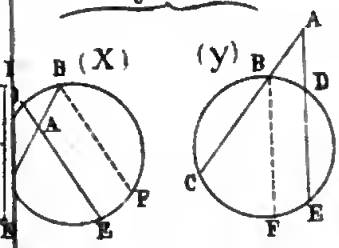


Fig: 45.ª



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

Fig. 4.

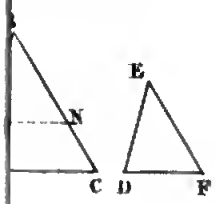


Fig. 5.

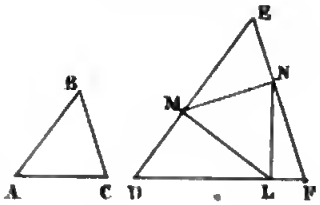


Fig. 7.

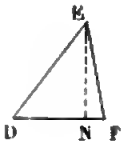
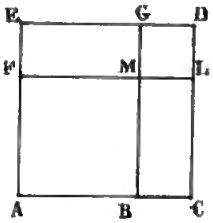


Fig. 8.



11.

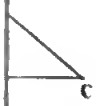


Fig. 12

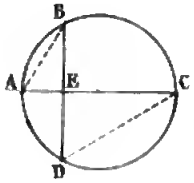


Fig. 13.

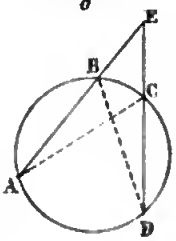


Fig. 16.

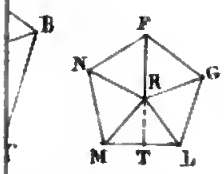
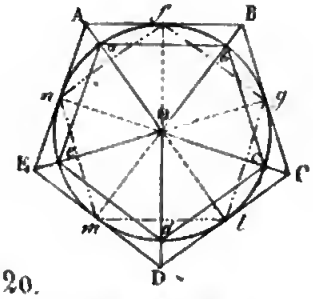


Fig. 17.



9.

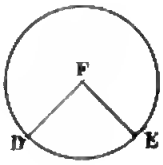
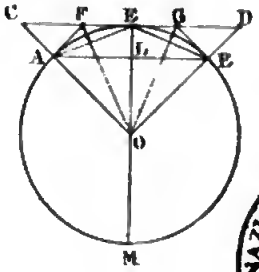


Fig. 20.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Fig: 4.ª

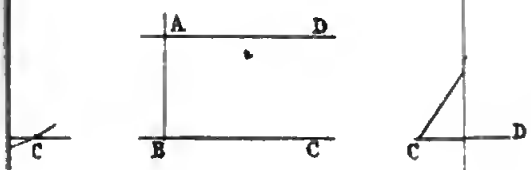


Fig: 8.ª

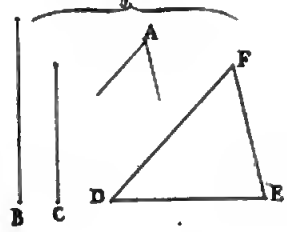


Fig 11.ª

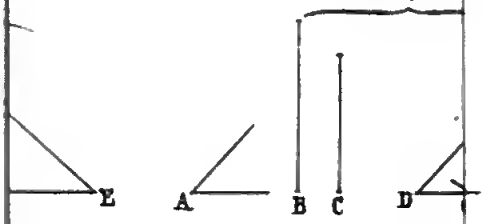


Fig. 15.ª

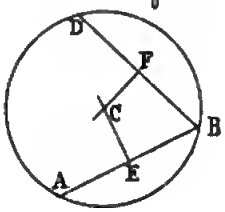


Fig: 18.ª

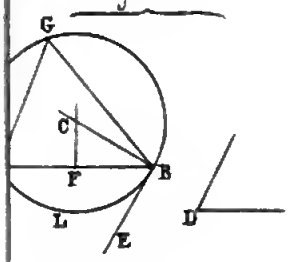


Fig: 1

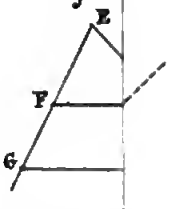


Fig: 23.ª

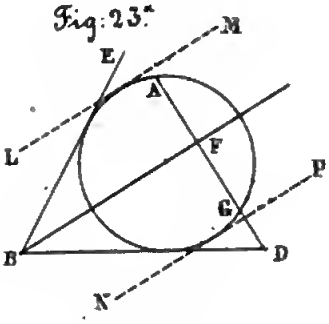


Fig. 26.ª

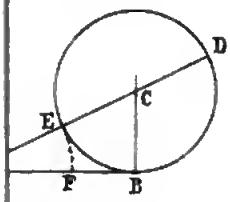


Fig: 27

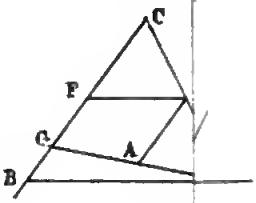


Fig. 31.ª

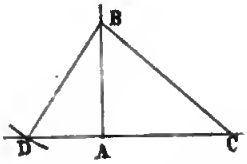


Fig: 35.ª

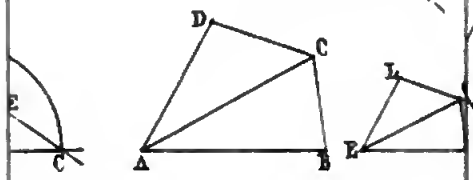


Fig. 39.ª

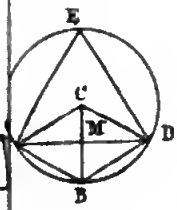
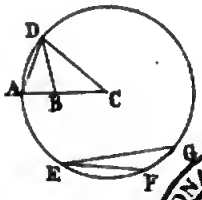


Fig: 40.ª



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA